ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΓΩΝΙΣΤΙΚΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ»

«Master of Science in Design and Manufacturing of Sports Vehicle Systems”

«Γραμμική και μη Γραμμική Εγκάρσια Δυναμική Συμβατικού Οχήματος με ανοιχτό Διαφορικό: Παραμετρική ανάλυση του Μοντέλου ενός Ίχνους με βάση ακριβείς λύσεις και αριθμητικές προσεγγίσεις»

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. του Τ.Ε.Ι. Στερεάς Ελλάδας
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Σχεδίαση και Κατασκευή Συστημάτων Αγωνιστικών Οχημάτων
από τον

Καραγκιαούρη Νικόλαο του Μιχαήλ

Ιούνιος 2018

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΓΩΝΙΣΤΙΚΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ»

«Master of Science in Design and Manufacturing of Sports Vehicle Systems »

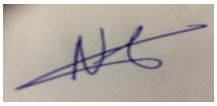
«Γραμμική και μη Γραμμική Εγκάρσια Δυναμική Συμβατικού Οχήματος με ανοιχτό Διαφορικό: Παραμετρική ανάλυση του Μοντέλου ενός Ίχνους με βάση ακριβείς λύσεις και αριθμητικές προσεγγίσεις»

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. του Τ.Ε.Ι. Στερεάς Ελλάδας
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Σχεδίαση και Κατασκευή Συστημάτων Αγωνιστικών Οχημάτων
από τον

Καραγκιαούρη Νικόλαο του Μιχαήλ

Δήλωση Αυθεντικότητας, ζητήματα Copyright
«Ο μεταπτυχιακός φοιτητής που εκπόνησε την παρούσα διπλωματική εργασία φέρει ολόκληρη την ευθύνη προσδιορισμού της δίκαιης χρήσης του υλικού, η οποία ορίζεται στη βάση των εξής παραγόντων: του σκοπού και χαρακτήρα της χρήσης (μη-εμπορικός, μη-κερδοσκοπικός, αλλά εκπαιδευτικός-ερευνητικός), της φύσης του υλικού που χρησιμοποιεί (τμήμα του κειμένου, πίνακες, σχήματα, εικόνες κ.λπ.), του ποσοστού και της σημαντικότητας του τμήματος που χρησιμοποιεί σε σχέση με το όλο κείμενο υπό copyright, και των πιθανών συνεπειών της χρήσης αυτής στην αγορά ή την γενικότερη αξία του υπό copyright κειμένου».

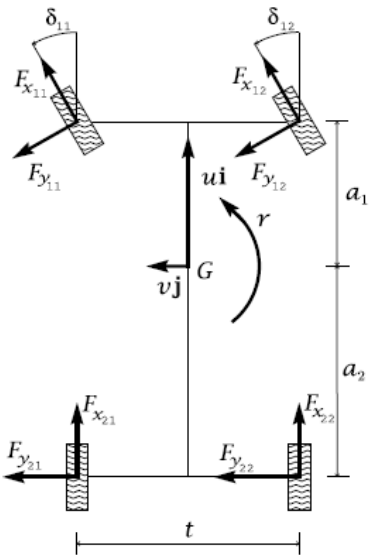


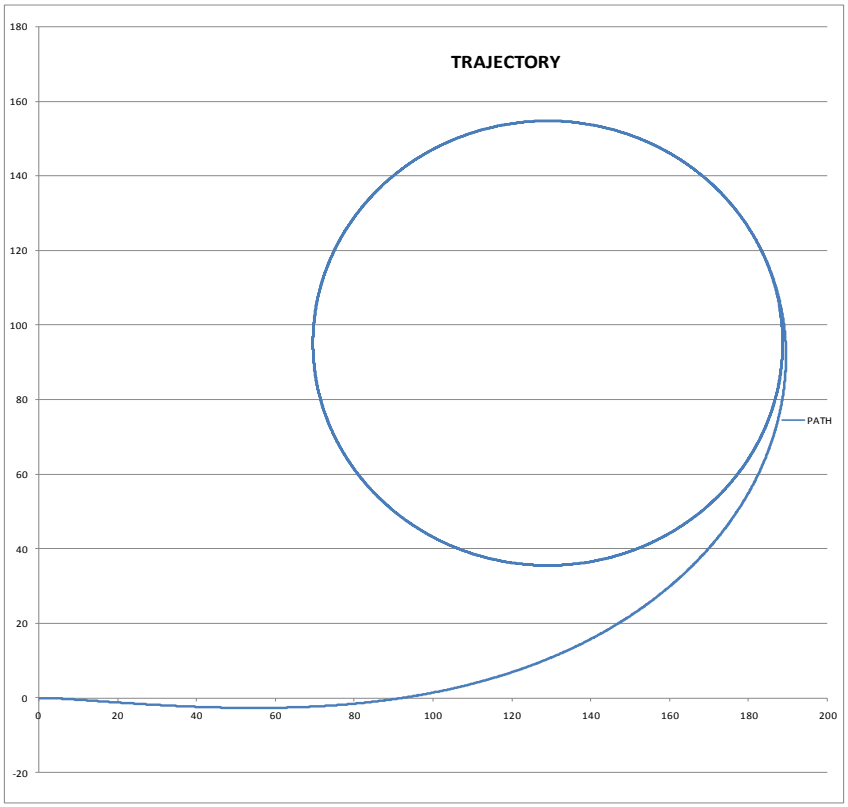
Ιούνιος 2018

TECHNOLOGICAL EDUCATION INSTITUTE
OF STEREA ELLADA
School of Technological Applications
Mechanical Engineering Department
MSc Design and Manufacturing of Sport
Vehicle Systems

Diploma Thesis

Linear and non-Linear Lateral Dynamics of Road Cars with Open Differential: Parametric Study of the Single Track Model based on exact Solutions and Numerical Approximations





Karagkiaouris Nikolaos

Supervisor : Ph.D. Eng. S. Markolefas
Assistant Professor

Psachna Evia
June 2018

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διπλωματική εργασία αυτή εντάσσεται στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μηχανολογίας του Τ.Ε.Ι. Στερεάς Ελλάδας με τίτλο «Σχεδίαση και Κατασκευή Συστημάτων Αγωνιστικών Οχημάτων» και έχει θέμα: «Γραμμική και μη Γραμμική Εγκάρσια Δυναμική Συμβατικού Οχήματος με ανοιχτό Διαφορικό: Παραμετρική ανάλυση του Μοντέλου ενός Ίχνους με βάση ακριβείς λύσεις και αριθμητικές προσεγγίσεις».

Σκοπός της εργασίας είναι,

- η παρουσίαση των βασικών αρχών της δυναμικής του οχήματος,
- η εξέταση της σχέσης ανάμεσα στις δυνάμεις, τη μάζα και την κίνηση του οχήματος,
- η δημιουργία μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν την δυναμική συμπεριφορά του οχήματος από την επίλυση των όποιων αξιολογείται ο ρόλος των παραμέτρων του μοντέλου στην εξεταζόμενη περίπτωση κίνησης του οχήματος,
- ο προσδιορισμός των φορτίων που αναπτύσσονται μεταξύ των μηχανισμών του, η αναγνώριση τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά των βασικών δυναμικών χαρακτηριστικών τους που επηρεάζουν την δυναμική συμπεριφορά του οχήματος και η εύρεση λύσεων για την επίτευξη της επιθυμητής επίδοσης του.

Η διπλωματική αυτή εργασία αποτελείται από εννέα κεφαλαία:

- Το Κεφάλαιο 1 όπου καταγράφονται οι βασικές παραδοχές και εξισώσεις (κινηματικές και δυναμικές) που ισχύουν στο μοντέλο οχήματος ενός ίχνους.
- Το Κεφάλαιο 2 όπου χρησιμοποιώντας γραμμικές διαφορικές εξισώσεις προσδιορίζουμε την συνάρτηση των κινηματικών μεγεθών με τον χρόνο στο γραμμικό μοντέλο οχήματος ενός ίχνους.
- Το Κεφάλαιο 3 όπου με την χρήση αριθμητικών προσεγγιστικών μεθόδων προσδιορίζουμε τα βασικά κινηματικά μεγέθη για το γραμμικό και μη γραμμικό μοντέλο οχήματος ενός ίχνους.
- Το Κεφάλαιο 4 όπου συγκρίνουμε τις τιμές των μεγεθών που προέκυψαν από την αναλυτική μέθοδο με τις αντίστοιχες που προέκυψαν από τις αριθμητικές προσεγγιστικές μεθόδους για το γραμμικό μοντέλο οχήματος ενός ίχνους.
- Το Κεφάλαιο 5 όπου συγκρίνουμε τις τιμές των μεγεθών που προέκυψαν από τις αριθμητικές προσεγγιστικές μεθόδους για το μη γραμμικό μοντέλο οχήματος ενός ίχνους.
- Το Κεφάλαιο 6 όπου με την χρήση υπολογιστικού φύλλου xls εξάγουμε γραφήματα των κινηματικών και δυναμικών μεγεθών συναρτήσει του χρόνου.
- Το Κεφάλαιο 7 όπου παρουσιάζονται οι βασικές παραδοχές και εξισώσεις (κινηματικές και δυναμικές) σε όχημα που κινείται σε δρόμο με κλίση εφαρμόζοντας και εδώ το μοντέλο οχήματος ενός ίχνους.
- Το Κεφάλαιο 8 όπου παρουσιάζουμε διαφορετικές περιπτώσεις (σενάρια) για την τροχιά του οχήματος στο γραμμικό και μη γραμμικό μοντέλο οχήματος ενός ίχνους.
- Το Κεφάλαιο 9 όπου αναφερόμαστε στην συνολική διαδικασία που ακολουθήθηκε και στους τρόπους βελτίωσης της. Επίσης κάνουμε προτάσεις για μελλοντική έρευνα και περαιτέρω διερεύνηση των κατασκευαστικών δεδομένων που ελήφθησαν που θα έχει ως αποτέλεσμα την βελτιστοποίηση της διαδικασίας και την χρήση αυτών και σε άλλες περιπτώσεις (αγωνιστικά οχήματα).

Θερμές ευχαριστίες απευθύνω στον καθηγητή μου Μαρκολέφα Στυλιανό Επίκουρο Καθηγητή και μέλος της Συντονιστικής Επιτροπής του Μεταπτυχιακού, για την ευκαιρία που μου πρόσφερε να ασχοληθώ με το εξαιρετικά ενδιαφέρον θέμα της Δυναμικής Οχημάτων και για τις πολύτιμες συμβουλές του και την καθοδήγησή του κατά την διάρκεια της εκπόνησης της πτυχιακής μου εργασίας.

INTRODUCTION

This diploma thesis is part of the postgraduate curriculum of the Department of Mechanical Engineering of CENTRAL GREECE UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES with title «Design and Manufacturing of Sports Vehicle Systems» and theme: «Linear and non-Linear Lateral Dynamics of Road Cars with Open Differential: Parametric Study of the Single Track Model based on exact Solutions and Numerical Approximations».

The purpose of the work is,

- the presentation of the basic principles of vehicle dynamics,
- examining the relationship between the forces, mass and movement of the vehicle,
- the creation of mathematical models describing the dynamic behavior of the vehicle from the solution of which the role of the model parameters in the vehicle case under consideration is evaluated,
- the determination of the loads developed between its mechanisms, the identification both theoretical and experimental of their basic dynamic characteristics that influence the dynamic behavior of the vehicle and finding solutions to achieve its desired performance.

This diploma thesis consists of nine chapters:

- Chapter 1, where the basic assumptions and equations (kinematic and dynamic) that apply to the vehicle model of a track are presented.
- Chapter 2, where using linear differential equations, determines the function of the kinematic parameters with time in the linear single track model.
- Chapter 3 where with the use of numerical approximation methods we determine the basic kinematic parameters for the linear and non linear single track model.
- Chapter 4 where we compare the values of the parameters resulting from the analytical method to those obtained from the numerical approximation methods for the linear single track model.
- Chapter 5 where we compare the values of the parameters derived from the numerical approximation methods for the non linear single track model.
- Chapter 6 where using xls spreadsheet we derive graphs of kinematic and dynamic parameters as a function of time.
- Chapter 7 where the basic assumptions and equations (kinematic and dynamic) are presented in a vehicle running on a curved banked road path, applying here also the single track model.
- Chapter 8 where we present different scenarios for the trajectory of the vehicle for the linear and non linear single track model.
- Chapter 9 where we relate to the overall process followed and how to improve it. We also make suggestions for future research and further exploration of constructive input data that will be used to optimize the process and use it in other cases (race cars).

I would like to express my sincere thanks to Professor Markolefas Stylianos, Assistant Professor and member of the Coordinating Committee of the Postgraduate School, for the opportunity offered to me to deal with the extremely interesting topic of Dynamic Vehicles and for his valuable advice and guidance during the preparation of the my graduate work.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕΓΕΘΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ. 1

1.1 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΟΧΗΜΑΤΟΣ
1.1.1 Βασικές Παραδοχές. 2
1.1.2 Βασικές Εξισώσεις και σύστημα Αναφοράς Οχήματος. 2
1.1.2α Κινηματικές εξισώσεις 3
1.1.2β Γωνία Εκτροπής (Περιστροφής) και Τροχιά Οχήματος. 4
1.1.3 Κέντρο Ταχύτητας της Κίνησης του Οχήματος. 6
1.1.3α Ορισμένοι Θεμελιώδεις Λόγοι. 7
1.1.4 Επιτάχυνση Οχήματος και Ακτίνα Καμπυλότητας τροχιάς. 7
1.1.5 Κινηματική των Τροχών (Ολίσθηση Ελαστικών) 10

1.2 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΟΧΗΜΑΤΟΣ
1.2.1 Εξισώσεις Δυναμικής Ισορροπίας. 13
1.2.2 Δυνάμεις που δρουν στο Όχημα. 14
1.2.3 Συνισταμένες των Εξωτερικών Δυνάμεων στο Όχημα. 17
1.2.4 Εξισώσεις Κίνησης (Δυναμικής Ισορροπίας) 17
1.2.5 Διαμήκης Μεταφορά των Φορτίων (εμπρός – πίσω) 19
1.2.6 Πλευρική Μεταφορά των Φορτίων (αριστερά – δεξιά) 19
1.2.7 Κατακόρυφα φορτία στους τροχούς. 20

1.3 1ης ΤΑΞΗΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
1.3.1 Εισαγωγή και Βασικές Παραδοχές. 20
1.3.1α Εσωτερικές Συντεταγμένες (βαθμοί ελευθερίας) των Αναρτήσεων. 21
1.3.1β Ακαμψίες κλυδωνισμού (Περιστροφής) και κατακόρυφες ακαμψίες . . . 23
1.3.2 Εσωτερική Ισορροπία των αναρτήσεων. 25
1.3.2α Επίδραση πλευρικών φορτίων. 25
1.3.2β Κέντρα μη Περιστροφής και Άξονας μη Περιστροφής. 26
1.3.2γ Περιστροφή και ανύψωση της ανάρτησης. 28
1.3.2δ Μεταφορές Φορτίων. 28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΧΕΙΡΙΣΜΟΙ ΣΕ ΣΥΜΒΑΤΙΚΑ ΟΧΗΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ. 30

2.1 ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΓΩΝΙΑ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ
2.1.1 Βασικές Παραδοχές. 30
2.1.2 Κινηματική στην μόνιμη κατάσταση. 31
2.1.3 Δυναμική και αναρτήσεις στην μόνιμη κατάσταση. 33

2.1.4 Εξίσωση τροχιάς. 40
2.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ
2.2.1 Εισαγωγή. 41
2.2.2 Βασικές Παραδοχές και εξισώσεις. 42
2.2.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. 44
2.2.4 Σχέση πλευρικής ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου. 45
2.2.5 Σχέση ρυθμού εκτροπής συναρτήσει του χρόνου. 48
2.2.6 Οριακή (κρίσιμη) προς τα εμπρός ταχύτητα. 50
2.2.7 Σχέση γωνίας εκτροπής συναρτήσει του χρόνου. 51

2.3 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ
2.3.1 Προσδιορισμός κινηματικών μεγεθών. 52
2.3.2 Προσδιορισμός δυναμικών μεγεθών και αναρτήσεις. 54

2.4 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΡΟΧΙΑΣ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ 59

2.5 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΠΛΕΥΡΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΡΥΘΜΟΥ ΕΚΤΡΟΠΗΣ 67

2.6 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ACKERMANN
2.6.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητές την γωνία ολίσθησης και την γωνία Ackermann. 69
2.6.2 Σχέση πλευρικής γωνία ολίσθησης και γωνίας Ackermann συναρτήσει του χρόνου. 70
2.6.3 Σχέση μεταξύ γωνίας ολίσθησης και γωνία Ackermann (απαλοιφή χρόνου) 74

2.7 ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΓΩΝΙΑΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ. 76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 :ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

3.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ (μέθοδος Crank-Nicolson)
. 78

3.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ
3.2.1 Μέθοδος Explicit Forward. 81
3.2.2 Μέθοδος 4th Order Runge-Kutta. 82

3.3 ΒΗΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ CRANK-NICOLSON ΠΟΥ ΕΦΑΡΜΟΣΤΗΚΕ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ
. 83

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 :ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

4.1 ΠΛΕΥΡΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΡΥΘΜΟΣ ΕΚΤΡΟΠΗΣ-ΓΩΝΙΑ ΕΚΤΡΟΠΗΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ. 84

4.2 ΘΕΣΕΙΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ ΟΧΗΜΑΤΟΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ) ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ. 88

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 :ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΣΤΟ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

5.1 ΠΛΕΥΡΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΡΥΘΜΟΣ ΕΚΤΡΟΠΗΣ-ΓΩΝΙΑ ΕΚΤΡΟΠΗΣ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ. 90

5.2 ΘΕΣΕΙΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ ΟΧΗΜΑΤΟΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ) ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ. 93

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 :ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

6.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ 95

6.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ. 96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 : ΚΙΝΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ ΣΕ ΔΡΟΜΟ ΜΕ ΚΛΙΣΗ

7.1 Βασικές Παραδοχές και εξισώσεις. 98
7.2 Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. 99
7.3 Προσδιορισμός συνάρτησης γωνίας ολίσθησης β. 101

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 : ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΡΟΧΙΑΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΡΙΣΙΜΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

8.1 Παραδείγματα τροχιάς σε γραμμικό και μη γραμμικό μοντέλο . . . 102
8.2 Υπολογισμός κρίσιμης ταχύτητας. 107

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΙΜΩΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΜΠΡΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV: ΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V: ΚΩΔΙΚΑΣ VBA ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΓΕΘΩΝ (ΕΛΛΗΝΙΚΑ)

Μέγεθος	**Ορολογία**	**Μονάδα μέτρησης**
α_y	Πλευρική Επιτάχυνση	m/s^2
α_x	Διαμήκης Επιτάχυνση	m/s^2
u	Προς τα εμπρός ταχύτητα	m/s
v	Πλευρική (εγκάρσια) ταχύτητα	m/s
dv/dt	Ρυθμός μεταβολής πλευρικής ταχύτητας	m/s^2
du/dt	Ρυθμός μεταβολής προς τα εμπρός ταχύτητας	m/s^2
r	Ρυθμός Εκτροπής οχήματος ή ρυθμός περιστροφής	1/s
m	Μάζα οχήματος	kg
X_1	εμπρός – άθροισμα διαμήκων δυνάμεων	N
X_2	πίσω – άθροισμα διαμήκων δυνάμεων	N
X_α	Διαμήκης αεροδύναμη	N
Y_1	εμπρός – άθροισμα πλευρικών δυνάμεων	N
Y_2	πίσω – άθροισμα πλευρικών δυνάμεων	N
Z_1	εμπρός – άθροισμα κάθετων δυνάμεων	N
Z_2	πίσω – άθροισμα κάθετων δυνάμεων	N
g	επιταχυνση της βαρυτητας	m/s^2
$Z_{\alpha 1}$	Κατακόρυφη αεροδύναμη στους μπροστά τροχούς	N
$Z_{\alpha 2}$	Κατακόρυφη αεροδύναμη στους πίσω τροχούς	N
J_z	Ροπή αδρανείας στον κατακόρυφο άξονα z	$kg*m^2$
J_{zx}	Ροπή αδρανείας στο επίπεδο zx	$kg*m^2$
dr/dt	Ρυθμός μεταβολής ρυθμού περιστροφής	$1/s^2$
ΔZ_1	εμπρος – διαφορά κάθετων δυνάμεων	N
ΔZ_2	πίσω – διαφορά κάθετων δυνάμεων	N
τ_1	εμπρός μετατρόχιο	m
τ_2	πίσω μετατρόχιο	m
h	Απόσταση κέντρου Μάζας από το οδόστρωμα	m
L	Ροπή ανατροπής ως προς τον Διαμήκη άξονα	N*m
α_1	απόσταση κέντρου μάζας από εμπρόσθιο άξονα	m
α_2	απόσταση κέντρου μάζας από πίσω άξονα	m
M	Ροπή ως προς τον εγκάρσιο άξονα	N*m
ΔX_1	εμπρός – διαφορά διαμήκων δυνάμεων	N
ΔX_2	πίσω – διαφορά διαμήκων δυνάμεων	N
N	Ροπή εκτροπής ή περιστροφής	N*m
N_y	Ροπή εκτροπής ή περιστροφής στον άξονα y	N*m
N_x	Ροπή εκτροπής ή περιστροφής στον άξονα x	N*m
x_N	Λόγος Ροπής εκτροπής στον άξονα y προς Ροπή εκτροπής	m
a_1	γωνία ολίσθησης των μπροστά τροχών	rad (-)
a_2	γωνία ολίσθησης των πίσω τροχών	rad (-)
δ_υ	Θεωρητική γωνία διεύθυνσης	1/m
χ	Συντελεστής διόρθωσης για γωνία διεύθυνσης πίσω	-
C_1	Ακαμψία λόγω πλευρικής ολίσθησης εμπρός	N/rad (N)
C_2	Ακαμψία λόγω πλευρικής ολίσθησης πίσω	N/rad (N)
d^2v/dt^2	Πρώτη παράγωγος ρυθμού μεταβολής πλευρικής ταχύτητας	m/s^3
d^2r/dt^2	Πρώτη παράγωγος ρυθμού μεταβολής ρυθμού περιστροφής	$1/s^3$
u_{cr}	οριακή τιμή προς τα εμπρός ταχύτητας	m/s
ψ	γωνία εκτροπής	rad (-)
t	χρονική στιγμή	s
μ_1	Ιδιοτιμή 1	1/s
μ_2	Ιδιοτιμή 2	1/s
R	Απόσταση του C από τον διαμήκη κεντροβαρικό άξονα x του οχήματος	m
S	Διαμήκη θέση της προβολής του C (επί του άξονα x)	m
GC	θέση σημείου C σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του οχήματος	m

β	Γωνία Ολίσθησης οχήματος	rad (-)
A	Γωνία Ackermann	rad (-)
ρ	Αντίστροφο της απόστασης του C από τον διαμήκη κεντροβαρικό άξονα x του οχήματος	1/m
L	Μεταξόνιο	m
a_G	Η (απόλυτη) επιτάχυνση του κέντρου μάζας	m/s^2
a_t	επιτρόχια επιτάχυνση	m/s^2
a_n	κεντρομόλος επιτάχυνση	m/s^2
dR/dt	Ρυθμός μεταβολής της απόστασης του C από τον διαμήκη κεντροβαρικό άξονα x του οχήματος	m/s
dS/dt	Ρυθμός μεταβολής της διαμήκης θέσης της προβολής του C (επί του άξονα x)	m/s
α_C	επιτάχυνση του κέντρου ταχυτήτων C	m/s^2
V_G	απόλυτη ταχύτητα του κέντρου Μάζας του Οχήματος	m/s
R_G	ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του κέντρου Μάζας	m
ρ_G	καμπυλότητα της τροχιάς	1/m
ξ	Γωνία που σχηματίζει η (απόλυτη) επιτάχυνση του κέντρου μάζας με την απόσταση KG	rad (-)
KG	Απόσταση από το κέντρο βάρους του οχήματος έως το κέντρο επιτάχυνσης	m
Y	Πλευρική Δύναμη	N
V_α	σχετική ταχύτητα μεταξύ οχήματος και αέρα	m/s
V_{air}	ταχύτητα αέρα	m/s
ρ_{air}	πυκνότητα αέρα	kg/m^3
S_α	εμβαδόν επιφάνειας μετωπιαίας προβολής οχήματος (προβολή σε επίπεδο κάθετο στον άξονα x)	m^2
C_x	συντελεστής σχήματος (οπισθέλκουσας) στον άξονα x	-
C_{z1}	συντελεστής σχήματος (οπισθέλκουσας) στον άξονα z των μπροστά τροχών	-
C_{z2}	συντελεστής σχήματος (οπισθέλκουσας) στον άξονα z των πίσω τροχών	-
C_y	συντελεστής σχήματος (οπισθέλκουσας) στον άξονα y	-
Y_α	Πλευρική αεροδύναμη	N
Z_α	Κατακόρυφη αεροδύναμη	N
F_α	συνισταμένη αεροδύναμη	N
$M_{\alpha y}$	ροπή αεροδύναμης (οπισθέλκουσας) στον άξονα y	N*m
φ_{1s}	Γωνία περιστροφής αμαξώματος, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των αναρτήσεων εμπρός	rad (-)
φ_{2s}	Γωνία περιστροφής αμαξώματος, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των αναρτήσεων πίσω	rad (-)
φ_{1p}	Γωνία περιστροφής εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των ελαστικών εμπρός	rad (-)
φ_{2p}	Γωνία περιστροφής εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των ελαστικών πίσω	rad (-)
$k_{s\varphi 1}$	Ακαμψία περιστροφής λόγω της ανάρτησης εμπρός	N*m
$k_{s\varphi 2}$	Ακαμψία περιστροφής λόγω της ανάρτησης πίσω	N*m
p_1	Κατακόρυφη ακαμψία ελαστικών εμπρός	N/m
p_2	Κατακόρυφη ακαμψία ελαστικών πίσω	N/m
$k_{p\varphi 1}$	Ακαμψία περιστροφής λόγω παραμόρφωσης των ελαστικών εμπρός	N*m
$k_{p\varphi 2}$	Ακαμψία περιστροφής λόγω παραμόρφωσης των ελαστικών πίσω	N*m
$k_{\varphi 1}$	Ισοδύναμη ακαμψία περιστροφής εμπρός	N*m
$k_{\varphi 2}$	Ισοδύναμη ακαμψία περιστροφής πίσω	N*m
k_φ	Γενική Ακαμψία Περιστροφής του αμαξώματος	N*m
L_b	καθαρή ροπή	N*m
q_1	Ύψος του κέντρου κλυδωνισμού από το οδόστρωμα εμπρός	m
q_2	Ύψος του κέντρου κλυδωνισμού από το οδόστρωμα πίσω	m

q_b	Ύψος σημείου κλυδωνισμού από το οδόστρωμα	m
Z_{01}	εμπρός – στατικά κάθετα φορτία αξόνων	N
Z_{02}	πίσω – στατικά κάθετα φορτία αξόνων	N
ΔZ	διαμήκης μεταφορά (κατακόρυφου) φορτίου	N
Z_{11}	Κατακόρυφο φορτίο στο τροχό 11	N
Z_{12}	Κατακόρυφο φορτίο στο τροχό 12	N
Z_{21}	Κατακόρυφο φορτίο στο τροχό 21	N
Z_{22}	Κατακόρυφο φορτίο στο τροχό 22	N
R_O	Άθροισμα κατακόρυφου φορτίου εμπρός	N
R_I	Άθροισμα κατακόρυφου φορτίου πίσω	N
Y_{11}	εμπρός άθροισμα πλευρικών στο τροχό 11	N
Y_{12}	εμπρός άθροισμα πλευρικών στο τροχό 12	N
Y_{21}	πίσω άθροισμα πλευρικών στο τροχό 21	N
Y_{22}	πίσω άθροισμα πλευρικών στο τροχό 22	N
ΔY_1	εμπρός – διαφορά πλευρικών δυνάμεων	N
ΔY_2	πίσω – διαφορά πλευρικών δυνάμεων	N
b_1	Θέση στιγμιαίου κέντρου περιστροφής σε σχέση με το σημείο επαφής τροχού – οδοστρώματος εμπρός	m
b_2	Θέση στιγμιαίου κέντρου περιστροφής σε σχέση με το σημείο επαφής τροχού – οδοστρώματος πίσω	m
Δt_1	θεωρητικό μετατρόχιο εμπρός	m
Δt_2	θεωρητικό μετατρόχιο πίσω	m
c_1	Θέση στιγμιαίου κέντρου περιστροφής σε σχέση με το σημείο επαφής τροχού – οδοστρώματος εμπρός	m
c_2	Θέση στιγμιαίου κέντρου περιστροφής σε σχέση με το σημείο επαφής τροχού – οδοστρώματος πίσω	m
$\Delta\gamma_{11}$	μεταβολή της γωνίας κάμπερ του τροχού 11	rad (-)
$\Delta\gamma_{12}$	μεταβολή της γωνίας κάμπερ του τροχού 12	rad (-)
$\Delta\gamma_{21}$	μεταβολή της γωνίας κάμπερ του τροχού 21	rad (-)
$\Delta\gamma_{22}$	μεταβολή της γωνίας κάμπερ του τροχού 22	rad (-)
z_{1s}	Κατακόρυφη μετατόπιση αμαξώματος στα εμπρός κέντρα των μετατροχίων, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των αναρτήσεων	m
z_{2s}	Κατακόρυφη μετατόπιση αμαξώματος στα πίσω κέντρα των μετατροχίων, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των αναρτήσεων	m
k_{sz1}	Κατακόρυφη ακαμψία αναρτήσεων εμπρός	N/m
k_{sz2}	Κατακόρυφη ακαμψία αναρτήσεων πίσω	N/m
k_{pz1}	Κατακόρυφη ακαμψία ελαστικών εμπρός	N/m
k_{pz2}	Κατακόρυφη ακαμψία ελαστικών πίσω	N/m
z_{1p}	Κατακόρυφη μετατόπιση αμαξώματος στα εμπρός κέντρα των μετατροχίων, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των ελαστικών	m
z_{2p}	Κατακόρυφη μετατόπιση αμαξώματος στα πίσω κέντρα των μετατροχίων, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των ελαστικών	m
z_1	Κατακόρυφη μετατόπιση στα εμπρός κέντρα των μετατροχίων	m
z_2	Κατακόρυφη μετατόπιση στα πίσω κέντρα των μετατροχίων	m
Z_{1b}	Κατακόρυφη Ακαμψία (Φορτίο) εμπρός	N
Z_{2b}	Κατακόρυφη Ακαμψία (Φορτίο) πίσω	N
u_{11}	Προς τα εμπρός ταχύτητα του τροχού 11	m/s
u_{12}	Προς τα εμπρός ταχύτητα του τροχού 12	m/s
u_{21}	Προς τα εμπρός ταχύτητα του τροχού 21	m/s
u_{22}	Προς τα εμπρός ταχύτητα του τροχού 22	m/s
v_{11}	Πλευρική (εγκάρσια) ταχύτητα του τροχού 11	m/s
v_{12}	Πλευρική (εγκάρσια) ταχύτητα του τροχού 12	m/s
v_{21}	Πλευρική (εγκάρσια) ταχύτητα του τροχού 21	m/s
v_{22}	Πλευρική (εγκάρσια) ταχύτητα του τροχού 22	m/s
V_{11}	απόλυτη ταχύτητα των κέντρων του τροχού 11	m/s

V_{12}	απόλυτη ταχύτητα των κέντρων του τροχού 12	m/s
V_{21}	απόλυτη ταχύτητα των κέντρων του τροχού 21	m/s
V_{22}	απόλυτη ταχύτητα των κέντρων του τροχού 22	m/s
β_{11}	γωνία μεταξύ του διαμήκους άξονα και της ταχύτητας του κέντρου του τροχού 11	rad (-)
β_{12}	γωνία μεταξύ του διαμήκους άξονα και της ταχύτητας του κέντρου του τροχού 12	rad (-)
β_{21}	γωνία μεταξύ του διαμήκους άξονα και της ταχύτητας του κέντρου του τροχού 21	rad (-)
β_{22}	γωνία μεταξύ του διαμήκους άξονα και της ταχύτητας του κέντρου του τροχού 22	rad (-)
X_{11}	εμπρός άθροισμα διαμήκων στο τροχό 11	N
X_{12}	εμπρός άθροισμα διαμήκων στο τροχό 12	N
X_{21}	πίσω άθροισμα διαμήκων στο τροχό 21	N
X_{22}	πίσω άθροισμα διαμήκων στο τροχό 22	N
δ_1	γωνία διεύθυνσης των μπροστά τροχών	rad (-)
δ_2	γωνία διεύθυνσης των πίσω τροχών	rad (-)
δ_{11}	γωνία διεύθυνσης του τροχού 11	rad (-)
δ_{12}	γωνία διεύθυνσης του τροχού 12	rad (-)
δ_{21}	γωνία διεύθυνσης του τροχού 21	rad (-)
δ_{22}	γωνία διεύθυνσης του τροχού 22	rad (-)
a_{11}	γωνία ολίσθησης του τροχού 11	rad (-)
a_{12}	γωνία ολίσθησης του τροχού 12	rad (-)
a_{21}	γωνία ολίσθησης του τροχού 21	rad (-)
a_{22}	γωνία ολίσθησης του τροχού 22	rad (-)
$\omega_{11}*r_1$	γραμμική ταχύτητα των κέντρων του τροχού 11	m/s
$\omega_{12}*r_1$	γραμμική ταχύτητα των κέντρων του τροχού 12	m/s
$\omega_{21}*r_2$	γραμμική ταχύτητα των κέντρων του τροχού 21	m/s
$\omega_{22}*r_2$	γραμμική ταχύτητα των κέντρων του τροχού 22	m/s
σ_{y11}	θεωρητική πλευρική ολίσθηση του τροχού 11	-
σ_{y12}	θεωρητική πλευρική ολίσθηση του τροχού 12	-
σ_{y21}	θεωρητική πλευρική ολίσθηση του τροχού 21	-
σ_{y22}	θεωρητική πλευρική ολίσθηση του τροχού 22	-
σ_{x11}	θεωρητική διαμήκης ολίσθηση του τροχού 11	-
σ_{x12}	θεωρητική διαμήκης ολίσθηση του τροχού 12	-
σ_{x21}	θεωρητική διαμήκης ολίσθηση του τροχού 21	-
σ_{x22}	θεωρητική διαμήκης ολίσθηση του τροχού 22	-
X	Διαμήκης Δύναμη	N
Z	Κατακόρυφη Δύναμη	N
F	Εξωτερικές Δυνάμεις που ασκούνται στο Όχημα	N
M_G	Ροπή των Εξωτερικών Δυνάμεων ως προς το κέντρο Μάζας	N*m
μ_{11}	Συντελεστής πρόσφυσης ελαστικού – οδοστρώματος στην εγκάρσια διεύθυνση στο τροχό 11	-
μ_{12}	Συντελεστής πρόσφυσης ελαστικού – οδοστρώματος στην εγκάρσια διεύθυνση στο τροχό 12	-
μ_{21}	Συντελεστής πρόσφυσης ελαστικού – οδοστρώματος στην εγκάρσια διεύθυνση στο τροχό 21	-
μ_{22}	Συντελεστής πρόσφυσης ελαστικού – οδοστρώματος στην εγκάρσια διεύθυνση στο τροχό 22	-
μ_1	Συντελεστής πρόσφυσης ελαστικού – οδοστρώματος στην εγκάρσια διεύθυνση στους τροχούς εμπρός	-
μ_2	Συντελεστής πρόσφυσης ελαστικού – οδοστρώματος στην εγκάρσια διεύθυνση στους τροχούς πίσω	-

TABLE OF PARAMETERS

Parameter	Terminology	Measurement Unit
α_y	longitudinal acceleration	m/s^2
α_x	lateral acceleration	m/s^2
u	forward velocity	m/s
v	lateral velocity	m/s
dv/dt	time rate of change of lateral velocity	m/s^2
du/dt	time rate of change of forward velocity	m/s^2
r	yaw rate	1/s
m	total mass of the vehicle	kg
X_1	longitudinal force for front wheels	N
X_2	longitudinal force for rear wheels	N
X_α	aerodynamic force at x axis	N
Y_1	lateral or side force for front wheels	N
Y_2	for front wheels for rear wheels	N
Z_1	vertical or normal force for front wheels	N
Z_2	vertical or normal force for rear wheels	N
g	Gravitational acceleration	m/s^2
$Z_{\alpha 1}$	vertical aerodynamic load for front wheels	N
$Z_{\alpha 2}$	vertical aerodynamic load for rear wheels	N
J_z	Moment of inertia at z axis	$kg*m^2$
J_{zx}	Moment of inertia at plane zx	$kg*m^2$
dr/dt	time rate of change of yaw rate	$1/s^2$
ΔZ_1	lateral load transfer for front wheels	N
ΔZ_2	lateral load transfer for rear wheels	N
τ_1	front track length	m
τ_2	rear track length	m
h	Vertical distance between center of mass and the pavement	m
L	rolling moment	N*m
α_1	longitudinal distance between center of mass and front axle	m
α_2	longitudinal distance between center of mass and rear axle	m
M	pitching moment	N*m
ΔX_1	longitudinal load transfer for front wheels	N
ΔX_2	longitudinal load transfer for rear wheels	N
N	yawing moment	N*m
N_y	yawing moment at y axis	N*m
N_x	yawing moment at x axis	N*m
x_N	Ratio of yawing moment at y axis and yawing moment	m
a_1	Apparent slip angle for front wheels	rad (-)
a_2	Apparent slip angle for rear wheels	rad (-)
δ_u	steering wheel rotation (as imposed by the driver)	1/m
χ	Correction factor for rear wheels	-
C_1	axle lateral slip stiffness for front wheels	N/rad (N)
C_2	axle lateral slip stiffness for rear wheels	N/rad (N)
d^2v/dt^2	Second derivative of lateral velocity	m/s^3
d^2r/dt^2	Second derivative of yaw rate	$1/s^3$
u_{cr}	Critical forward velocity	m/s
ψ	vehicle yaw angle	rad (-)
t	time	s
μ_1	Eigenvalue 1	1/s
μ_2	Eigenvalue 2	1/s

R	distance of C from the vehicle axis	m
S	longitudinal position of C	m
GC	position of C of a vehicle in the body-fixed frame	m
β	vehicle slip angle	rad (-)
A	Ackermann angle	rad (-)
ρ	Opposite of distance of C from the vehicle axis	1/m
L	Wheelbase length	m
a_G	absolute acceleration of G	m/s^2
a_t	Tangential acceleration	m/s^2
a_n	Centripetal acceleration	m/s^2
dR/dt	time rate of change of distance of C from the vehicle axis	m/s
dS/dt	time rate of change of longitudinal position of C	m/s
α_C	velocity center C acceleration	m/s^2
V_G	Absolute velocity of G	m/s
R_G	radius of curvature	m
ρ_G	curvature	1/m
ξ	angle between absolute acceleration of G with distance KG	rad (-)
KG	distance from CG of vehicle to acceleration Center	m
Y	total lateral or side force	N
V_α	relative velocity between the vehicle and the air	m/s
V_{air}	air velocity	m/s
ρ_{air}	air density	kg/m^3
S_α	area of the vehicle frontal projection (frontal area)	m^2
C_x	Drag (shape) coefficient at x axis	-
C_{z1}	Drag (shape) coefficient at z axis for front wheels	-
C_{z2}	Drag (shape) coefficient at z axis for rear wheels	-
C_y	Drag (shape) coefficient at y axis	-
Y_α	aerodynamic force at y axis	N
Z_α	aerodynamic force at z axis	N
F_α	total aerodynamic force	N
$M_{\alpha y}$	pitch moment	N*m
φ_{1s}	body roll angle due to suspension deflections only for front wheels	rad (-)
φ_{2s}	body roll angle due to suspension deflections only for rear wheels	rad (-)
φ_{1p}	body roll angle due to tire deformations only for front wheels	rad (-)
φ_{2p}	body roll angle due to tire deformations only for rear wheels	rad (-)
$k_{s\varphi 1}$	suspension roll stiffness for front wheels	N*m
$k_{s\varphi 2}$	suspension roll stiffness for rear wheels	N*m
p_1	vertical stiffness of a single front tire	N/m
p_2	vertical stiffness of a single rear tire	N/m
$k_{p\varphi 1}$	tire roll stiffness for front wheels	N*m
$k_{p\varphi 2}$	tire roll stiffness for rear wheels	N*m
$k_{\varphi 1}$	global roll stiffness for front wheels	N*m
$k_{\varphi 2}$	global roll stiffness for rear wheels	N*m
k_φ	global roll stiffness	N*m
L_b	pure rolling moment	N*m
q_1	Vertical distance from roll center to pavement for front wheels	m
q_2	Vertical distance from roll center to pavement for rear wheels	m
q_b	Vertical distance from roll center to pavement	m
Z_{01}	static load for front wheels	N
Z_{02}	static load for rear wheels	N

ΔZ	vertical load transfer due to the longitudinal acceleration	N
Z_{11}	vertical or normal force of wheel 11	N
Z_{12}	vertical or normal force of wheel 12	N
Z_{21}	vertical or normal force of wheel 21	N
Z_{22}	vertical or normal force of wheel 22	N
R_O	vertical or normal force for front wheels	N
R_I	vertical or normal force for rear wheels	N
Y_{11}	lateral or side force of wheel 11	N
Y_{12}	lateral or side force of wheel 12	N
Y_{21}	lateral or side force of wheel 21	N
Y_{22}	lateral or side force of wheel 22	N
ΔY_1	lateral load transfer for front wheels	N
ΔY_2	lateral load transfer for rear wheels	N
b_1	Vertical distance of roll center instant position to contact point wheel – pavement for front wheels	m
b_2	Vertical distance of roll center instant position to contact point wheel – pavement for rear wheels	m
$\Delta\tau_1$	track variation for front wheels	m
$\Delta\tau_2$	track variation for rear wheels	m
c_1	Longitudinal distance of roll center instant position to contact point wheel – pavement for front wheels	m
c_2	Longitudinal distance of roll center instant position to contact point wheel – pavement for rear wheels	m
$\Delta\gamma_{11}$	camber variation of wheel 11	rad (-)
$\Delta\gamma_{12}$	camber variation of wheel 12	rad (-)
$\Delta\gamma_{21}$	camber variation of wheel 21	rad (-)
$\Delta\gamma_{22}$	camber variation of wheel 22	rad (-)
z_{1s}	body vertical displacement due to suspension deflections only for front wheels	m
z_{2s}	body vertical displacement due to suspension deflections only for rear wheels	m
k_{sz1}	suspension roll vertical stiffness for front wheels	N/m
k_{sz2}	suspension roll vertical stiffness for rear wheels	N/m
k_{pz1}	tire roll vertical stiffness for front wheels	N/m
k_{pz2}	tire roll vertical stiffness for rear wheels	N/m
z_{1p}	body vertical displacement due to tire deformations only for front wheels	m
z_{2p}	body vertical displacement due to tire deformations only for rear wheels	m
z_1	front vertical displacement of the vehicle centerline	m
z_2	rear vertical displacement of the vehicle centerline	m
Z_{1b}	vertical load due to vertical displacement for front wheels	N
Z_{2b}	vertical load due to vertical displacement for rear wheels	N
u_{11}	vehicle forward velocity of wheel 11	m/s
u_{12}	vehicle forward velocity of wheel 12	m/s
u_{21}	vehicle forward velocity of wheel 21	m/s
u_{22}	vehicle forward velocity of wheel 22	m/s
v_{11}	lateral velocity of wheel 11	m/s
v_{12}	lateral velocity of wheel 12	m/s
v_{21}	lateral velocity of wheel 21	m/s
v_{22}	lateral velocity of wheel 22	m/s
V_{11}	Absolute velocity of wheel 11	m/s
V_{12}	Absolute velocity of wheel 12	m/s
V_{21}	Absolute velocity of wheel 21	m/s
V_{22}	Absolute velocity of wheel 22	m/s
β_{11}	vehicle slip angle of wheel 11	rad (-)
β_{12}	vehicle slip angle of wheel 12	rad (-)

β_{21}	vehicle slip angle of wheel 21	rad (-)
β_{22}	vehicle slip angle of wheel 12	rad (-)
X_{11}	longitudinal force of wheel 11	N
X_{12}	longitudinal force of wheel 12	N
X_{21}	longitudinal force of wheel 21	N
X_{22}	longitudinal force of wheel 22	N
δ_1	steering angle for front wheels	rad (-)
δ_2	steering angle for rear wheels	rad (-)
δ_{11}	steering angle of wheel 11	rad (-)
δ_{12}	steering angle of wheel 12	rad (-)
δ_{21}	steering angle of wheel 21	rad (-)
δ_{22}	steering angle of wheel 22	rad (-)
a_{11}	tire slip angle of wheel 11	rad (-)
a_{12}	tire slip angle of wheel 12	rad (-)
a_{21}	tire slip angle of wheel 21	rad (-)
a_{22}	tire slip angle of wheel 22	rad (-)
$\omega_{11}*r_1$	rolling velocity of wheel 11	m/s
$\omega_{12}*r_1$	rolling velocity of wheel 12	m/s
$\omega_{21}*r_2$	rolling velocity of wheel 21	m/s
$\omega_{22}*r_2$	rolling velocity of wheel 22	m/s
σ_{y11}	lateral slip of wheel 11	-
σ_{y12}	lateral slip of wheel 12	-
σ_{y21}	lateral slip of wheel 21	-
σ_{y22}	lateral slip of wheel 22	-
σ_{x11}	longitudinal slip of wheel 11	-
σ_{x12}	longitudinal slip of wheel 12	-
σ_{x21}	longitudinal slip of wheel 21	-
σ_{x22}	longitudinal slip of wheel 12	-
X	total longitudinal force	N
Z	total vertical or normal force	N
F	total external force	N
M_G	total external couple	N*m
μ_{11}	friction factor of wheel 11	-
μ_{12}	friction factor of wheel 12	-
μ_{21}	friction factor of wheel 21	-
μ_{22}	friction factor of wheel 12	-
μ_1	friction factor for front wheels	-
μ_2	friction factor for rear wheels	-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δυναμική των οχημάτων (vehicle dynamics) βασίζεται πρωτίστως στην Κλασική Μηχανική. Η Κλασική Μηχανική είναι κλάδος της Φυσικής ο οποίος ασχολείται με το σύνολο των φυσικών νόμων που περιγράφουν την κίνηση σωμάτων υπό την επήρεια ενός συστήματος δυνάμεων.

Η Δυναμική (Dynamics) λοιπόν είναι ένας κλάδος της Φυσικής, ο οποίος έχει ως αντικείμενο τη μελέτη των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται σε ένα σώμα και την επίδρασή τους πάνω στην κίνηση του σώματος αυτού. Είναι προφανές ότι η δυναμική οχημάτων ασχολείται με τη μελέτη των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται στο όχημα κατά τη διάρκεια της οδήγησής του, και την επίδρασή τους πάνω στην κίνηση και την οδική συμπεριφορά του οχήματος αυτού. Καθόσον η επίδοση του οχήματος, (δηλαδή οι κινήσεις που πραγματοποιούνται κατά την επιτάχυνση, την πέδηση, και την αλλαγή διεύθυνσης του αυτοκινήτου) είναι μια απόκριση στις δυνάμεις που ασκούνται στο όχημα και στα μέρη του, ένα μεγάλο μέρος της μελέτης της δυναμικής του οχήματος πρέπει να περιλαμβάνει τη μελέτη του πώς και γιατί παράγονται οι δυνάμεις αυτές.

Η δυναμική προσέγγιση των οχημάτων προσδιορίζει κρίσιμες παραμέτρους του οχήματος, όπως γεωμετρικές παραμέτρους, παραμέτρους σχετικά με την ίδια την κίνηση του αυτοκινήτου, με τη μάζα του οχήματος και την κατανομή της, καθώς και παραμέτρους σχετικά με την αεροδυναμική του οχήματος (η Αεροδυναμική είναι κλάδος της Δυναμικής), και τα ελαστικά.

Παρ' όλα αυτά, πρέπει να σημειωθεί ότι οι βασικές αρχές που διέπουν το φαινόμενο της κίνησης ενός οχήματος αγγίζουν σχεδόν όλους τους τομείς της Μηχανικής, ξεκινώντας από την στατική και δυναμική μηχανική και καταλήγοντας στην Ρευστοδυναμική και τη Μηχανική του παραμορφώσιμου ελαστικού σώματος.

Η μελέτη της δυναμικής των οχημάτων μπορεί να γίνει με αναλυτικές μεθόδους και αριθμητικές μεθόδους. Μια αναλυτική προσέγγιση της δυναμικής των οχημάτων είναι απαραίτητη για τους Μηχανικούς, ώστε βασιζόμενοι σε κανόνες της Φυσικής, να είναι ικανοί να διατυπώσουν τα κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα και τους μηχανισμούς εκείνους που προσεγγίζουν το φυσικό πρόβλημα. Στις περισσότερες περιπτώσεις καταλήγουμε σε αλγεβρικές και διαφορικές εξισώσεις που μπορούν να προβλέψουν με ικανοποιητική ακρίβεια τη συμπεριφορά ενός οχήματος και να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των κατασκευαστικών παραμέτρων του οχήματος.

Με γνωστες αριθμητικές προσεγγιστικές μεθόδους και παραδοχές που κάνουμε υπολογίζουμε ταχύτερα τα μεγέθη. Στην συνεχεια συγκρίνουμε τα αποτελεσματα και παρατηρουμε ότι το σφάλμα που προκύπτει είναι αρκετά μικρό και δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Στο Κεφαλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την Κινηματική και Δυναμική Αναλυση μοντέλου οχήματος ενός ίχνους. (Single Track Model).

1.1 Κινηματική Ανάλυση Οχήματος ενός ίχνους

1.1.1 Βασικές Παραδοχές

Για το οδόστρωμα:

Το οδόστρωμα θεωρείται επίπεδο χωρίς ανωμαλίες. Επίσης, οι μικροανωμαλίες, που συσχετίζονται με τους συντελεστές τριβής και πρόσφυσης, θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες.

Για το όχημα:

α) Οι παραμορφώσεις των αναρτήσεων στην ισορροπία δυνάμεων θεωρούνται αμελητέες (η πλευρική μεταφορά των κατακόρυφων δυνάμεων λόγω παραμόρφωσης των αναρτήσεων λαμβάνεται υπ' όψη).
β) Οι κατακόρυφες παραμορφώσεις των ελαστικών θεωρούνται αμελητέες (η πλευρική μεταφορά των κατακόρυφων δυνάμεων λόγω παραμόρφωσης των ελαστικών λαμβάνεται υπ' όψη).
γ) Οι γωνίες διεύθυνσης των τροχών είναι μικρές (steering angles).
δ) Το σύστημα οδήγησης θεωρείται άκαμπτο.

Ονοματολογία για τις γωνίες διεύθυνσης των τροχών δ_{ij}

$i=1$	Εμπρός
$i=2$	Πίσω
$j=1$	Αριστερά
$j=2$	Δεξιά

(«Αριστερά» σημαίνει: αριστερά του οδηγού)

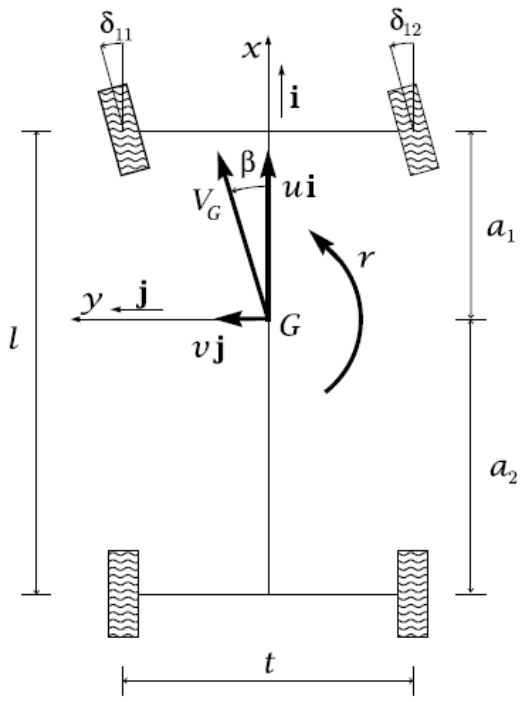
Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, προκύπτουν τα ακόλουθα γενικά χαρακτηριστικά για το μοντέλο οχήματος:
α) Το όχημα εξετάζεται στην απαραμόρφωτη κατάσταση και στο αρχικό σύστημα αναφοράς (θεωρία 1ης Τάξης), εκτός από το γεγονός ότι λαμβάνονται υπ' όψη οι (μικρές) γωνίες διεύθυνσης (steering angles). Προσοχή: Όπως προαναφέρθηκε, οι παραμορφώσεις των αναρτήσεων λαμβάνονται υπ' όψη στον υπολογισμό των δυνάμεων.
β) Τα βασικά γεωμετρικά μεγέθη $(\alpha_1,\alpha_2,l,t_1,t_2$ **και** $h)$ βλ. Σχήμα 1.1, θεωρούνται σταθερά κατά την κίνηση του οχήματος, με δεδομένο ότι οι επιταχύνσεις δεν είναι υπερβολικά μεγάλες και δεν αλλάζουν απότομα.
γ) Η επίδραση της γωνίας Κάστερ (Caster angle) και της γωνίας κλίσης πείρου ακραξονίου (kingpin inclination angle), στη δυναμική του οχήματος, θεωρούνται αμελητέες (ως προσέγγιση 1ης Τάξης).
δ) Το όχημα παρουσιάζει πρακτικά επίπεδη κίνηση, σε επίπεδο παράλληλο στο οδόστρωμα.
ε) Τα κέντρα των τροχών (δηλ., το σημείο Q ή το σημείο P πιο κάτω), έχουν σταθερή θέση σε σχέση με το σώμα (αμάξωμα) του οχήματος.

1.1.2 Βασικές Εξισώσεις και Σύστημα Αναφοράς Οχήματος

Υπάρχουν γενικά τριών ειδών Εξισώσεις, βλ. [1]:
α) Κινηματικές εξισώσεις
β) Εξισώσεις ισορροπίας
γ) Καταστατικές εξισώσεις ελαστικών των τροχών (αναφέρονται στις σχέσεις δυνάμεων-ροπών και παραμορφώσεων των ελαστικών).

Το κύριο σύστημα Αναφοράς Οχήματος, $S=(x,y,z;G)$,φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Τα μοναδιαία διανύσματα είναι (i,j,k). Η αρχή του συστήματος είναι το κέντρο βάρους G, ενώ οι

άξονες του είναι σταθεροί σε σχέση με το όχημα. Ως εκ τούτου, το σύστημα ***S=(x,y,z;G)*** δεν είναι γενικώς αδρανειακό.
Ο άξονας ***x*** είναι προς την διεύθυνση κίνησης (forward direction).
Ο άξονας ***y*** είναι κάθετος στον άξονα ***x*** και προσδιορίζει την εγκάρσια διεύθυνση (το σύστημα ***xy*** είναι παράλληλο στο οδόστρωμα).
Ο άξονας ***z*** είναι κατακόρυφος, προς τα πάνω (κάθετος στο οδόστρωμα).



<u>Σχήμα 1.1</u>: Γενικά Γεωμετρικά και Κινηματικά μεγέθη απλού Δυναμικού μοντέλου Οχήματος σε επίπεδη κίνηση, [1]

<u>1.1.2α Κινηματικές Εξισώσεις</u>

Το διάνυσμα της απόλυτης ταχύτητας του κέντρου Μάζας του Οχήματος, σε σχέση με το Σύστημα αναφοράς Οχήματος είναι

$V_G = u*i + v*j$	(1.1)

Η γωνιακή ταχύτητα εκτροπής (ή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, Yaw (angular) Velocity) γράφεται ως

$\Omega = r*k$	(1.2)

Όπου

u	Προς τα εμπρός ταχύτητα
v	Πλευρική (εγκάρσια) ταχύτητα
r	Ρυθμός Εκτροπής οχήματος (ή ρυθμός περιστροφής – Yaw Rate)

Η ταχύτητα κάθε σημείου ***P*** του αμαξώματος γράφεται με βάση την γνωστή σχέση της κινηματικής στερεού σώματος

$V_P = V_G + \Omega \times GP$	(1.3)

όπου ***GP*** είναι το διάνυσμα θέσης του ***P*** σε σχέση με το ***G***. Σημειώνεται ότι το ***ΩxGP*** συμβολίζει το εξωτερικό γινόμενο των ***Ω*** και ***GP***.

Με βάση τα παραπάνω, οι κύριες μεταβλητές κατάστασης (state variables) για την κινηματική του οχήματος είναι οι ***u(t)***,***v(t)*** και ***r(t).*** Κάτω από κανονικές συνθήκες λειτουργίας (normal operating conditions) έχουμε ***u(t)>0*** (κίνηση προς τα εμπρός) και

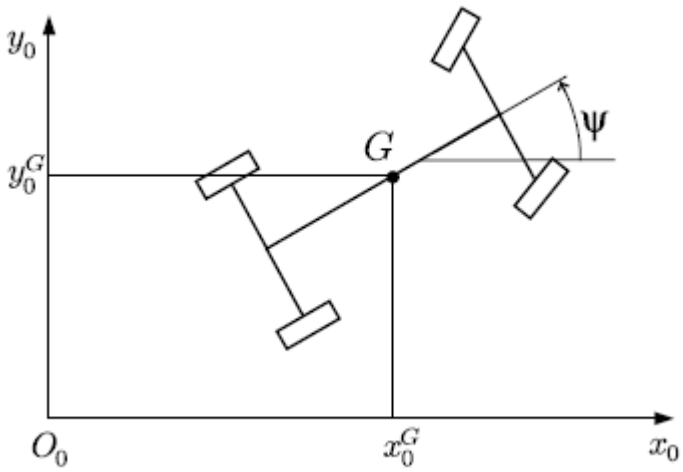
$u(t) \gg \lvert v(t) \rvert, u(t) \gg l * \lvert r(t) \rvert$	(1.4)

(Μικρή πλευρική ταχύτητα, μικρή επιρροή του ρυθμού περιστροφής στην απόλυτη ταχύτητα κάθε σημείου)

1.1.2β Γωνία Εκτροπής (Περιστροφής) και Τροχιά Οχήματος

Είναι πολλές φορές επιθυμητό να εκφρασθεί η κίνηση του οχήματος συναρτήσει ενός συστήματος αναφοράς, ακίνητου ως προς το έδαφος.
Έστω $S_0 = (x_0,y_0,z_0;O_0)$ ένα σταθερό σύστημα στο έδαφος (βλ. Σχήμα 1.2), με μοναδιαία διανύσματα (i_0,j_0,k_0). Το S_0 θεωρείται Αδρανειακό Σύστημα. Με βάση γνωστή διανυσματική ανάλυση, έχουμε

$i_0 * i = \cos(\psi)$	(1.5α)
$i_0 * j = \sin(\psi)$	(1.5β)



Σχήμα 1.2: Θέση Κέντρου Μάζας Οχήματος στο απόλυτο (αδρανειακό) Σύστημα αναφοράς και γωνία εκτροπής, [1]

όπου ***ψ*** είναι η γωνία εκτροπής (Yaw angle) και π.χ., i_0*i είναι το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας γράφεται ως

$V_G = u * i + v * j = u_0 * i_0 + v_0 * j_0$	(1.6)
$u_0 = \frac{dx_0}{dt} = \dot{x}_0$	(1.7α)

$v_0 = \frac{dy_0}{dt} = \dot{y}_0$	(1.7β)

Από την (1.6) προκύπτει η σχέση της συνιστώσας u_0 με την γωνία εκτροπής ψ και των συνιστωσών του κινούμενου συστήματος (σύστημα οχήματος).

$V_G * i_0 = u * i * i_0 + v * j * i_0 = u_0 * i_0 * i_0 + v_0 * j_0 * i_0$ $u_0 = u * i * i_0 + v * j * i_0$ $u_0 = u * \cos(\psi) - v * \sin(\psi)$	(1.8)

Με τον ίδιο τρόπο προσδιορίζουμε την συνιστώσα v_0

Συνοψίζοντας,

$u_0 = u * \cos(\psi) - v * \sin(\psi)$	(1.9 a)
$v_0 = u * \sin(\psi) + v * \cos(\psi)$	(1.9 b)
$r = \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$	(1.9 c)

Η γωνία εκτροπής μια ορισμένη χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση

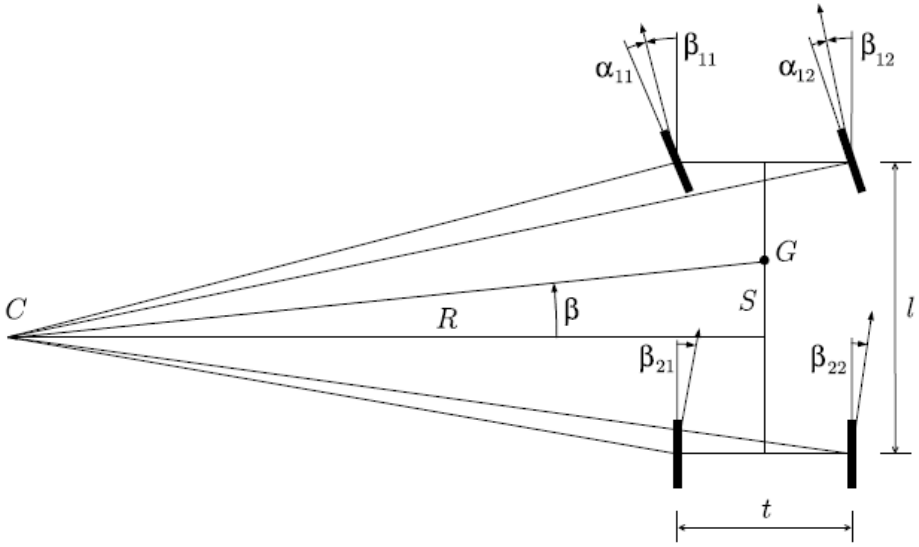
$\psi(\hat{t}) = \psi(0) + \int_0^{\hat{t}} dt$	(1.10)

Όταν είναι γνωστή η συνάρτηση $\psi(t)$ η απόλυτη θέση του G, σε σχέση με το ακίνητο (αδρανειακό) σύστημα αναφοράς, προκύπτει με ολοκλήρωση των δύο πρώτων εξισώσεων της (1.9)

$x_0(\hat{t}) = x_0(0) + \int_0^{\hat{t}} u_0(t)\,dt$ $x_0(\hat{t}) = x_0(0) + \int_0^{\hat{t}} \left(u(t) * \cos(\psi(t)) - v(t) * \sin(\psi(t))\right) dt$	(1.11 a)
$y_0(\hat{t}) = y_0(0) + \int_0^{\hat{t}} v_0(t)\,dt$ $y_0(\hat{t}) = y_0(0) + \int_0^{\hat{t}} \left(u(t) * \sin(\psi(t)) + v(t) * \cos(\psi(t))\right) dt$	(1.11 b)

Οι δύο συναρτήσεις $x_0(t)$, $y_0(t)$ δίνουν την τροχιά του G, σε σχέση με το ακίνητο σύστημα Αναφοράς.

1.1.3 Κέντρο Ταχύτητας της Κίνησης του Οχήματος



Σχήμα 1.3: Κέντρο Ταχύτητας Οχήματος, [1]

Όταν ***r≠0*** και το στερεό σώμα εκτελεί επίπεδη κίνηση, τότε υπάρχει ένα νοητό σημείο ***C***, το οποίο καλείτε στιγμιαίο κέντρο μηδενικής ταχύτητας (ή στιγμιαίο κέντρο περιστροφής) ή κέντρο ταχύτητας τέτοιο ώστε

$V_c = 0$	(1.12)

Με βάση το Σχήμα 1.3, η θέση του σημείου ***C***, σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του οχήματος γράφεται

$GC = S*i + R*j$	(1.13)
$R = \frac{u}{r}$	(1.14 a)
$S = -\frac{v}{r}$	(1.14 b)

όπου

V_c	απόλυτη ταχύτητα
R	Απόσταση του C από τον διαμήκη κεντροβαρικό άξονα x του οχήματος
S	Διαμήκη θέση της προβολής του *C* (επί του άξονα x)

Για κάθε σημείο P του οχήματος έχουμε (αφού ***Vc=0***)

$V_p = \Omega x CP = r*k\,x\,CP$	(1.15)

Η επιτάχυνση του κέντρου ταχυτήτων ***C*** είναι μη μηδενική. Συγκεκριμένα,

$a_c = \left(a_x - r^2*S - \dot{r}*R\right)*i + \left(a_y - r^2*R + \dot{r}*S\right)*j$	(1.16 a)

ή ισοδύναμα

$a_c = r*(\dot{R}*i - \dot{S}*j)$	(1.16 b)
$\dot{R} = dR/dt, \dot{S} = dS/dt$	

1.1.3α Ορισμένοι Θεμελιώδεις Λόγοι

Γωνία Ολίσθησης Οχήματος

$\hat{\beta} = \arctan(\beta)$	(1.17 a)
$\beta = \frac{v}{u}$	(1.17 b)

Η γωνία ολίσθησης (σχέση 1.17 a) είναι η γωνία μεταξύ της διαμήκους διεύθυνσης ***i*** και του διανύσματος της ταχύτητας του κέντρου Μάζας V_G.

Καμπυλότητα

$\rho = \frac{r}{u} = \frac{1}{R}$	(1.18)

Ο λόγος που εκφράζεται από την (1.18) συσχετίζεται με την γνωστή γωνία Ackerman (Ackerman Angle). Η γωνία Ackerman αντιστοιχεί σε τόξο με εφαπτομένη ***(arctan=tan^{-1})***

$l*\rho = l*\frac{r}{u} = \frac{l}{R}$	(1.19)

1.1.4 Επιτάχυνση Οχήματος και Ακτίνα Καμπυλότητας τροχιάς

Η απόλυτη γωνιακή επιτάχυνση δίνεται από την σχέση

$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = \dot{r}*k = \ddot{\psi}*k = \frac{d^2\psi}{dt^2}*k$	(1.20)

Η (απόλυτη) επιτάχυνση του κέντρου μάζας, στο κινούμενο σύστημα αναφοράς του οχήματος, υπολογίζεται από την σχέση

$\alpha_G = \frac{dV_G}{dt} = (\dot{u} - v*r)*i + (\dot{v} + u*r)*j = \alpha_x*i + \alpha_y*j$	(1.21)

Στην εξαγωγή της παραπάνω εξίσωσης έχουν χρησιμοποιηθεί οι ακόλουθες σχέσεις στο κινούμενο σύστημα αναφοράς:

$\frac{di}{dt} = r*j$	(1.22 a)
$\frac{dj}{dt} = -r*i$	(1.22 b)

δηλ., τα μοναδιαία διανύσματα στο σύστημα αναφοράς οχήματος περιστρέφονται με βάση τον ρυθμό εκτροπής ***r*** (Yaw rate)

Χρησιμοποιώντας τις (1.17), (1.18) και (1.21) προκύπτει

Διαμήκης Επιτάχυνση

$a_x = \dot{u} - v * r = \dot{u} - u^2 * \beta * \rho$	(1.23)

Πλευρική Επιτάχυνση

$a_y = \dot{v} + u * r = u * \dot{\beta} + \dot{u} * \beta + u^2 * \rho$	(1.24)

Οι παραπάνω είναι οι συνιστώσες της απόλυτης επιτάχυνσης του κέντρου Μάζας, γραμμένες στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.

Κάτω από συνθήκες μόνιμης κατάστασης (steady-state), όπου ***du/dt=dv/dt=dr/dt =0***, προκύπτει

$a_{x,st} = -v * r = -u^2 * \beta * \rho$	(1.25 a)
$a_{y,st} = u * r = u^2 * \rho = \frac{u^2}{R}$	(1.25 b)

Επίσης, όταν ο λόγος ***β*** είναι μη μηδενικός ***(β≠0)***, η τροχιά του ***G*** δεν είναι εφαπτόμενη στον διαμήκη άξονα ***x***.

Το μοναδιαίο ***t***, κατά μήκος της V_G (και άρα, το μοναδιαίο εφαπτόμενο στην τροχιά του ***G***), δίνεται από την γνωστή (γενική) σχέση

$t = \frac{V_G}{\lvert V_G \rvert} = \cos(\hat{\beta}) * i + \sin(\hat{\beta}) * j$	(1.26)

Για μικρές γωνίες ολίσθησης, χρησιμοποιούμε τον λόγο ***β*** σε ***radians***, αντί της γωνίας ολίσθησης.

Το κάθετο μοναδιαίο ***n*** στην τροχιά υπολογίζεται από την

$n = k \times t = -\sin(\hat{\beta}) * i + \cos(\hat{\beta}) * j$	(1.27)

Η απόλυτη επιτάχυνση μπορεί να γραφεί στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, της τροχιάς, ως επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση

$a_G = a_t * t + a_n * n$	(1.28)
$a_t = a_G * t = a_x * \cos(\hat{\beta}) + a_y * \sin(\hat{\beta}) = \frac{\dot{u} * u + \dot{v} * v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$	(1.28 a)
$a_n = a_G * n = -a_x * \sin(\hat{\beta}) + a_y * \cos(\hat{\beta}) = \frac{r * (u^2 + v^2) + \dot{v} * u - \dot{u} * v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$	(1.28 b)

όπου

$\cos(\hat{\beta}) = \frac{u}{V_G}, \sin(\hat{\beta}) = \frac{v}{V_G}, V_G = \lvert V_G \rvert = \sqrt{u^2 + v^2}$	(1.29)

Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του κέντρου μάζας R_G δίνεται από την σχέση

$R_G = \frac{V_G^2}{a_n} = \frac{V_G}{r + \frac{\dot{v} * u - \dot{u} * v}{V_G^2}}$	(1.30)

Το κέντρο ταχύτητας ***C*** ταυτίζεται με το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς, αν και μόνο αν

$\dot{v} * u - \dot{u} * v = 0$	(1.30 a)

Η καμπυλότητα της τροχιάς ρ_G δίνεται από την σχέση

$\rho_G = \frac{1}{R_G} = \frac{r + \dot{\beta} * \cos^2(\hat{\beta})}{u} * \cos^2(\hat{\beta}) = \frac{r}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{\dot{v} * u - \dot{u} * v}{\sqrt{(u^2 + v^2)^3}}$	(1.31)

Σε κανονικές συνθήλες λειτουργίας

$\lvert\beta\rvert \ll 1, \beta \approx \hat{\beta}$	
$\rho_G \approx \frac{r + \dot{\beta}}{u} = \rho + \frac{\dot{\beta}}{u}$	(1.32)

Σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης ***(du/dt=dv/dt= dr/dt =0)***

$R_G = \frac{V_G}{r}, \rho_G = \frac{r}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{r}{V_G}$	(1.33)

Η επιτάχυνση κάθε σημείου P δίνεται από την σχέση

$a_P = a_G + \dot{\Omega} \times GP + \Omega \times (\Omega \times GP)$	(1.34)

Για επίπεδη κίνηση, από την (1.34) παίρνουμε

$a_P = a_G + \dot{r} * k \times GP - r^2 * GP$	(1.35)

Η εξίσωση (1.16) εξάγεται με βάση την (1.35).

Για το κέντρο Επιτάχυνσης ισχύουν οι σχέσεις

$\tan\xi = \frac{\dot{r}}{r^2}$	(1.35 a)
$\lvert KG\rvert = \frac{a_G}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^4}}$	(1.35 b)

1.1.5 Κινηματική των Τροχών (Ολίσθηση Ελαστικών)

Η ταχύτητα του κέντρου P_{11} του αριστερού εμπρόσθιου τροχού δίνεται από την (1.3) ως

$V_{11} = V_G + \Omega \times GP_{11} = V_G + r * k \times GP_{11} \Rightarrow V_{11} = u * i + v * j + r * k \times \left(a_1 * i + \frac{t_1}{2} * j \right)$	(1.36)

Τα κέντρα των τροχών είναι πρακτικά τα σημεία ***Q***.

Συνοψίζοντας, οι απόλυτες ταχύτητες των κέντρων των τροχών, διατυπωμένες στο σύστημα αναφοράς του οχήματος, είναι

$V_{11} = \left(u - \frac{r * t_1}{2} \right) * i + \left(v + r * a_1 \right) * j$	(1.37 a)
$V_{12} = \left(u + \frac{r * t_1}{2} \right) * i + \left(v + r * a_1 \right) * j$	(1.37 b)
$V_{21} = \left(u - \frac{r * t_2}{2} \right) * i + \left(v - r * a_2 \right) * j$	(1.37 c)
$V_{22} = \left(u + \frac{r * t_2}{2} \right) * i + \left(v - r * a_2 \right) * j$	(1.37 d)

Οι γωνίες β_{ij} μεταξύ του διαμήκους άξονα ***i*** και της ταχύτητας V_{ij} των κέντρων των τροχών, υπολογίζονται με βάση τις σχέσεις

$\tan(\hat{\beta}_{11}) = \frac{v + r * \alpha_1}{u - \frac{r * t_1}{2}} = \beta_{11} = \tan(\delta_{11} - \alpha_{11})$	(1.38 a)
$\tan(\hat{\beta}_{12}) = \frac{v + r * \alpha_1}{u + \frac{r * t_1}{2}} = \beta_{12} = \tan(\delta_{12} - \alpha_{12})$	(1.38 b)
$\tan(\hat{\beta}_{21}) = \frac{v - r * \alpha_2}{u - \frac{r * t_2}{2}} = \beta_{21} = \tan(\delta_{21} - \alpha_{21})$	(1.38 c)
$\tan(\hat{\beta}_{22}) = \frac{v - r * \alpha_2}{u + \frac{r * t_2}{2}} = \beta_{22} = \tan(\delta_{22} - \alpha_{22})$	(1.38 d)

Οι γωνίες ολίσθησης των τροχών (θετικές ωρολογιακές, δηλ., περιστροφή ως προς τον αρνητικό άξονα ***z***), είναι οι γωνίες μεταξύ της διεύθυνσης x_{ij} του τροχού και της ταχύτητας του σημείου ***C*** στο πέλμα του ελαστικού. Σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης, η ταχύτητα του ***C*** (ταχύτητα οδήγησης – speed of travel) θεωρείται προσεγγιστικά ίση με την ταχύτητα του κέντρου του τροχού. Άρα, αν δ_{ij} είναι οι γωνίες διεύθυνσης (steering angles) των τροχών, ισχύει

$\alpha_{ij} = \delta_{ij} - \beta_{ij}$	(1.39)

Οι θεωρητικές ολισθήσεις προσεγγίζονται ως ακολούθως

Θεωρητικές Διαμήκεις Ολισθήσεις (Theoretical longitudinal slips):

$\sigma_{x11} = \frac{V_{Cx11} - \omega_{c11} * r_{r1}}{\omega_{c11} * r_{r1}} = \frac{\left(u - \frac{r * t_1}{2}\right) * \cos(\delta_{11}) + (v + r * \alpha_1) * \sin(\delta_{11}) - \omega_{c11} * r_{r1}}{\omega_{c11} * r_{r1}}$	(1.40 a)
$\sigma_{x12} = \frac{V_{Cx12} - \omega_{c12} * r_{r1}}{\omega_{c12} * r_{r1}} = \frac{\left(u + \frac{r * t_1}{2}\right) * \cos(\delta_{12}) + (v + r * \alpha_1) * \sin(\delta_{12}) - \omega_{c12} * r_{r1}}{\omega_{c12} * r_{r1}}$	(1.40 b)
$\sigma_{x21} = \frac{V_{Cx21} - \omega_{c21} * r_{r2}}{\omega_{c21} * r_{r2}} = \frac{\left(u - \frac{r * t_2}{2}\right) * \cos(\delta_{21}) + (v - r * \alpha_2) * \sin(\delta_{21}) - \omega_{c21} * r_{r2}}{\omega_{c21} * r_{r2}}$	(1.40 c)
$\sigma_{x22} = \frac{V_{Cx22} - \omega_{c22} * r_{r2}}{\omega_{c22} * r_{r2}} = \frac{\left(u + \frac{r * t_2}{2}\right) * \cos(\delta_{22}) + (v - r * \alpha_2) * \sin(\delta_{22}) - \omega_{c22} * r_{r2}}{\omega_{c22} * r_{r2}}$	(1.40 d)

Θεωρητικές Πλευρικές Ολισθήσεις (Theoretical lateral slips) (Μικρός ρυθμός μεταβολής της γωνίας κάμπερ) :

$\sigma_y = \frac{V_{Cy} - \dot{\gamma} * s_r}{\omega_c * r_r} \approx \frac{V_{Cy}}{\omega_c * r_r}$	(1.41)
$\sigma_{y11} \approx \frac{V_{Cy11}}{\omega_{c11} * r_{r1}} = \frac{-\left(u - \frac{r * t_1}{2}\right) * \sin(\delta_{11}) + (v + r * \alpha_1) * \cos(\delta_{11})}{\omega_{c11} * r_{r1}}$	(1.41 a)
$\sigma_{y12} \approx \frac{V_{Cy12}}{\omega_{c12} * r_{r1}} = \frac{-\left(u + \frac{r * t_1}{2}\right) * \sin(\delta_{12}) + (v + r * \alpha_1) * \cos(\delta_{12})}{\omega_{c12} * r_{r1}}$	(1.41 b)
$\sigma_{y21} \approx \frac{V_{Cy21}}{\omega_{c21} * r_{r2}} = \frac{-\left(u - \frac{r * t_2}{2}\right) * \sin(\delta_{21}) + (v - r * \alpha_2) * \cos(\delta_{21})}{\omega_{c21} * r_{r2}}$	(1.41 c)
$\sigma_{y22} \approx \frac{V_{Cy22}}{\omega_{c22} * r_{r2}} = \frac{-\left(u + \frac{r * t_2}{2}\right) * \sin(\delta_{22}) + (v - r * \alpha_2) * \cos(\delta_{22})}{\omega_{c22} * r_{r2}}$	(1.41 d)

Ολίσθηση Περιστροφής (Spin slip):

Για κάθε τροχό χωριστά θα έχουμε:

$\varphi_{ij} = -\frac{\omega_{xij} + \omega_{cij} * (1 - \varepsilon_{\gamma i}) * \sin(\gamma_{ij})}{\omega_{cij} * r_{ri}} = -\frac{r + \dot{\delta}_{ij} + \omega_{cij} * (1 - \varepsilon_{\gamma i}) * \sin(\gamma_{ij})}{\omega_{cij} * r_{ri}}$	(1.42)

όπου

$\omega_{xij} = r + \dot{\delta}_{ij} \quad \dot{\delta}_{ij} \neq 0$	Γωνιακή ταχύτητα εκτροπής (γενικά διαφέρει από τροχό σε τροχό)
ω_{cij}	Γωνιακή ταχύτητα ζάντας (γενικά διαφορετική για κάθε τροχό)
r_{ri}	Ακτίνα κύλισης (υποθέτουμε ίδια για τους δύο εμπρόσθιους και για τους δύο πίσω τροχούς)
ε_{ri}	Συντελεστής μείωσης Κάμπερ (Camber reduction Factor) (πίσω και μπρος τροχοί)
γ_{ij}	Γωνία Κάμπερ τροχού ***ij***

Σημειώνεται ότι με βάση την σύμβαση, οι δύο τροχοί του ίδιου άξονα, σε στατικές συνθήκες ή σε μόνιμη ευθύγραμμη κίνηση έχουν γωνίες κάμπερ με διαφορετικό πρόσημο. Σε κανονικές συνθήκες οδήγησης και μικρές γωνίες διεύθυνσης:

<u>Θεωρητικές Διαμήκεις Ολισθήσεις</u>

$\sigma_{x11} \approx \dfrac{\left(u - \dfrac{r*t_1}{2}\right) - \omega_{c11}*r_{r1}}{\omega_{c11}*r_{r1}}$	(1.43 a)
$\sigma_{x12} \approx \dfrac{\left(u + \dfrac{r*t_1}{2}\right) - \omega_{c12}*r_{r1}}{\omega_{c12}*r_{r1}}$	(1.43 b)
$\sigma_{x21} \approx \dfrac{\left(u - \dfrac{r*t_2}{2}\right) - \omega_{c21}*r_{r2}}{\omega_{c21}*r_{r2}}$	(1.43 c)
$\sigma_{x22} \approx \dfrac{\left(u + \dfrac{r*t_2}{2}\right) - \omega_{c22}*r_{r2}}{\omega_{c22}*r_{r2}}$	(1.43 d)

<u>Θεωρητικές Πλευρικές Ολισθήσεις (Μικρός ρυθμός μεταβολής της γωνίας κάμπερ) :</u>

$\sigma_y = \dfrac{V_{Cy} - \dot{\gamma}*s_r}{\omega_c*r_r} \approx \dfrac{V_{Cy}}{\omega_c*r_r}$ $u \gg r*t_i/2$	(1.44)
$\sigma_{y11} \approx \dfrac{V_{Cy11}}{\omega_{c11}*r_{r1}} = \dfrac{-u*\delta_{11} + v + r*\alpha_1}{\omega_{c11}*r_{r1}}$	(1.44 a)
$\sigma_{y12} \approx \dfrac{V_{Cy12}}{\omega_{c12}*r_{r1}} = \dfrac{-u*\delta_{12} + v + r*\alpha_1}{\omega_{c12}*r_{r1}}$	(1.44 b)
$\sigma_{y21} \approx \dfrac{V_{Cy21}}{\omega_{c21}*r_{r2}} = \dfrac{-u*\delta_{21} + v - r*\alpha_2}{\omega_{c21}*r_{r2}}$	(1.44 c)
$\sigma_{y22} \approx \dfrac{V_{Cy22}}{\omega_{c22}*r_{r2}} = \dfrac{-u*\delta_{22} + v - r*\alpha_2}{\omega_{c22}*r_{r2}}$	(1.44 d)

1.2 Δυναμική Ανάλυση Οχήματος

1.2.1 Εξισώσεις Δυναμικής Ισορροπίας

Οι κλασσικές εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας για ένα στερεό σώμα, γραμμένες ως προς το κέντρο μάζας είναι

$m * a_G = F$	(1.45 a)
$\dot{K}_G^r = M_G$	(1.45 b)

Η (απόλυτη) επιτάχυνση του κέντρου Μάζας ***G*** γράφεται ως

$\alpha_G = \frac{dV_G}{dt} = (\dot{u} - v * r) * i + (\dot{v} + u * r) * j = \alpha_x * i + \alpha_y * j$	(1.46)

Ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη

$\dot{K}_G^r$	Ρυθμός μεταβολής της Στροφορμής (Rate of change of the Angular Momentum), σε σχέση με το κέντρο Μάζας
F	Εξωτερικές Δυνάμεις που ασκούνται στο Όχημα
M_G	Ροπή των Εξωτερικών Δυνάμεων ως προς το κέντρο Μάζας.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής γράφεται προσεγγιστικά

$\dot{K}_G^r \approx -J_{xz} * (\dot{r} * i + r^2 * j) + J_z * \dot{r} * k$	(1.47)
$J_{xy} \approx 0 \quad , \quad \lvert J_{xz} \rvert \ll J_z$	

Η ολική εξωτερική δύναμη ***F*** και η αντίστοιχη ροπή ***M_G*** αναπαρίστανται στο σύστημα αναφοράς του οχήματος ως εξής

$F = X * i + Y * j + Z * k$	(1.48)
$M_G = L * i + M * j + N * k$	(1.49)

Ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη

X	Διαμήκης Δύναμη (longitudinal force)
Y	Πλευρική Δύναμη (lateral or side force)
Z	Κατακόρυφη Δύναμη (vertical or normal force)
L	Ροπή ανατροπής ως προς τον Διαμήκη άξονα (rolling moment)
M	Ροπή ως προς τον εγκάρσιο άξονα (pitching moment)
N	Ροπή εκτροπής ή Ροπή περιστροφής (yawing moment)

1.2.2 Δυνάμεις που δρούν στο Όχημα

Βάρος Οχήματος

Η συνισταμένη του βάρους δρά στο κέντρο μάζας και γράφεται

$W = -m * g * k$	(1.50)

Το βάρος, προφανώς, δεν συνεισφέρει στην ροπή M_G.

Αεροδυναμικές Δυνάμεις (Aerodynamic Forces)

Οι αεροδυναμικές δυνάμεις εξαρτώνται από το σχήμα και το μέγεθος του οχήματος, καθώς και από την σχετική ταχύτητα $V_\alpha = V_{air} - V_G$ μεταξύ οχήματος και αέρα. Γενικά, οι συνιστώσες του αεροδυναμικού φορτίου γράφονται στο σύστημα του οχήματος ως

$F_\alpha = -X_\alpha * i + Y_\alpha * j + Z_\alpha * k$	(1.51)
$X_\alpha = \frac{1}{2} * \rho_\alpha * (V_\alpha)^2 * C_x * S_\alpha$	(1.52 a)
$Y_\alpha = \frac{1}{2} * \rho_\alpha * (V_\alpha)^2 * C_y * S_\alpha$	(1.52 b)
$Z_\alpha = \frac{1}{2} * \rho_\alpha * (V_\alpha)^2 * C_z * S_\alpha$	(1.52 c)

όπου ρ_α είναι η πυκνότητα του αέρα, V_α η σχετική ταχύτητα σε απολυτη τιμή, S_α είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της μετωπιαίας προβολής του οχήματος (προβολή σε επίπεδο κάθετο στον άξονα x) και C_x, C_y, C_z είναι οι συντελεστές σχήματος (C_x ο συντελεστής οπισθέλκουσας). Τυπικά $C_x>0$, για τον λόγο αυτό μπαίνει αρνητικό πρόσημο (η οπισθέλκουσα ή αεροδυναμική αντίσταση είναι αντίθετη της κίνησης). Αν $V_\alpha=-V_\alpha*i$ (η σχετική ταχύτητα έχει μόνο συνιστώσα πάνω στον άξονα x) τότε $C_y=0 \rightarrow Y_\alpha=0$. Τυπικά ισχύουν οι ακόλουθες τιμές

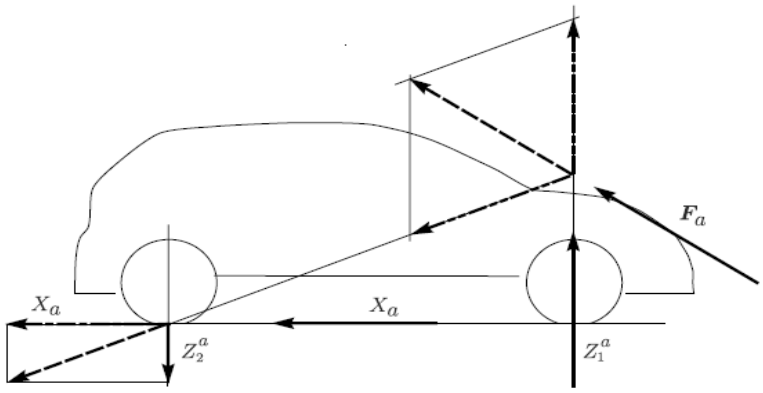
μοντέρνα αυτοκίνητα	S_α=1,8m^2	$C_x \approx$ 0,30-0,35	$C_x*S_\alpha \approx$ 0,60m^2
οχήματα Formula 1	S_α=1,3m^2	$C_x \approx$ 0,70-1,0	$C_x*S_\alpha \approx$ 1,20m^2 $C_z*S_\alpha \approx$-5,20m^2

Στη γενική περίπτωση, τα αεροδυναμικά φορτία συνεισφέρουν στην τιμή της ροπής M_G. Αυτό σημαίνει ότι η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης F_α δεν περνά από το κέντρο μάζας. Έτσι έχουμε

$M_\alpha = M_{\alpha x} * i + M_{\alpha y} * j + M_{\alpha z} * k$	(1.53)

Σε πολλές περιπτώσεις, οι συνιστώσες των αεροδυναμικών φορτίων δίνονται όπως στο Σχήμα 1.4 (μπροστινοί τροχοί, θετική προς τα πάνω-πίσω τροχοί, θετική προς τα πάνω) όπου το X_α δρά στο επίπεδο του οδοστρώματος

$Z_1^\alpha = \frac{1}{1} * (Z_\alpha * \alpha_2 - M_{\alpha y} + X_\alpha * h) = \frac{1}{2} * \rho_\alpha * (V_\alpha)^2 * C_{z1} * S_\alpha$	(1.54 α)
$Z_2^\alpha = \frac{1}{1} * (Z_\alpha * \alpha_1 + M_{\alpha y} - X_\alpha * h) = \frac{1}{2} * \rho_\alpha * (V_\alpha)^2 * C_{z2} * S_\alpha$	(1.54 β)



<u>Σχήμα 1.4</u>: Συνιστώσες της Συνισταμένης των Αεροδυναμικών Δυνάμεων στο επίπεδο xz, [1]

<u>Δυνάμεις πρόσφυσης (τριβής) στη διεπιφάνεια Ελαστικού – Οδοστρώματος</u>

Έστω F_{tij} οι δυνάμεις τριβής στο ίχνος του ελαστικού, οι οποίες μεταφέρονται στα σημεία Ο και F_{xij} και F_{yij} οι συνιστώσες του F_{tij} σε σχέση με τα συστήματα αναφοράς των τροχών (αρχή των αξόνων τα σημεία Ο) , βλ. Σχήμα 1.5. Το F_{tij} μπορεί να γραφεί στο σύστημα αναφοράς του Οχήματος ως ακολούθως

$F_{tij} = X_{ij} * i + Y_{ij} * j$	(1.55)

Όπου (με χρήση του μετασχηματισμού συντεταγμένων) και αντιστροφή προκύπτει

$X_{ij} = F_{xij} * \cos(\delta_{ij}) - F_{yij} * \sin(\delta_{ij})$	(1.56 a)
$Y_{ij} = F_{xij} * \sin(\delta_{ij}) + F_{yij} * \cos(\delta_{ij})$	(1.56 b)
$F_{xij} = X_{ij} * \cos(\delta_{ij}) + Y_{ij} * \sin(\delta_{ij})$	(1.56 c)
$F_{yij} = -X_{ij} * \sin(\delta_{ij}) + Y_{ij} * \cos(\delta_{ij})$	(1.56 d)

Ορίζονται για ευκολία στην ανάλυση τα ακόλουθα μεγέθη:

$X_1 = X_{11} + X_{12}$	(εμπρός – άθροισμα διαμήκων) (1.57 a)
$X_2 = X_{21} + X_{22}$	(πίσω – άθροισμα διαμήκων) (1.57 b)
$Y_1 = Y_{11} + Y_{12}$	(εμπρός – άθροισμα πλευρικών) (1.57 c)
$Y_2 = Y_{21} + Y_{22}$	(πίσω – άθροισμα πλευρικών) (1.57 d)

$\Delta X_1 = (X_{12} - X_{11}) / 2$	(εμπρός – διαφορά διαμήκων) (1.58 a)
$\Delta X_2 = (X_{22} - X_{21}) / 2$	(πίσω - διαφορά διαμήκων) (1.58 b)
$\Delta Y_1 = (Y_{12} - Y_{11}) / 2$	(εμπρός – διαφορά πλευρικών) (1.58 c)
$\Delta Y_2 = (Y_{22} - Y_{21}) / 2$	(πίσω - διαφορά πλευρικών) (1.58 d)

Οι δυνάμεις πρόσφυσης (τριβής) θεωρούνται εφαρμοζόμενες στο κέντρο του ίχνους του Ελαστικού (Tire Footprint or Contact Patch). Επιπροσθέτως, οι αντίστοιχες ροπές εκτροπής M_{zij} (Self aligning Torques) σε κάθε τροχό αμελούνται στους ακόλουθους υπολογισμούς.

Οι κάθετες δυνάμεις στην διεπιφάνεια Οδοστρώματος – Ελαστικού

Οι κάθετες δυνάμεις $F_{zij}*k$ (στα πέλματα των τροχών) είναι συνισταμένες των πιέσεων που αναπτύσσονται στις διεπιφάνειες. Η μετατόπιση της συνισταμένης προς την μεριά της κίνησης (σε σχέση με το σημείο ***O***), αποτελεί τον κύριο λόγο ύπαρξης της λεγόμενης ροπής κύλισης (rolling resistance).

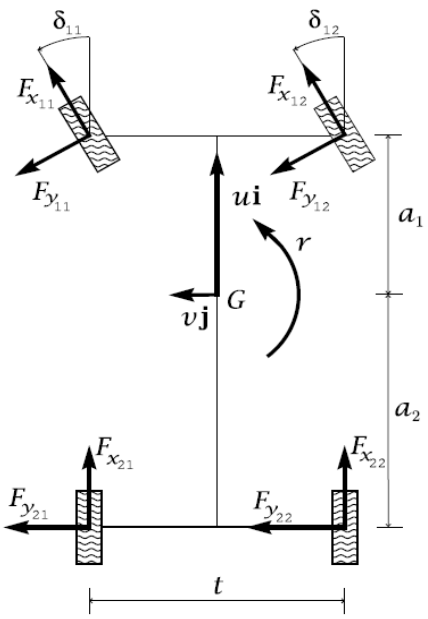
Το φαινόμενο της ροπής κύλισης (και της αντίστοιχης αντίστασης που καταχρηστικά καλείται τριβή κύλισης) μπορεί να αμεληθεί αν εξετάζεται για παράδειγμα, η οριακή κατάσταση φρεναρίσματος ή οι συνθήκες χειρισμού του οχήματος σε στροφές. Η τριβή κύλισης πρέπει να λαμβάνεται υπ'όψη στον υπολογισμό των απωλειών σε καύσιμο και γενικότερα, στον υπολογισμό των απωλειών ισχύος σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας.

Ορίζονται οι αντίστοιχες σχέσεις:

$Z_1 = F_{z11} + F_{z12}$	(εμπρός – άθροισμα κάθετων φορτίων) (1.59 a)
$Z_2 = F_{z21} + F_{z22}$	(πίσω – άθροισμα κάθετων φορτίων) (1.59 b)
$\Delta Z_1 = (F_{z12} - F_{z11}) / 2$	(εμπρός – διαφορά κάθετων φορτίων - lateral load transfer) (1.59 c)
$\Delta Z_2 = (F_{z22} - F_{z21}) / 2$	(πίσω – διαφορά κάθετων φορτίων - lateral load transfer) (1.59 d)

Αντιστρέφοντας τις εξισώσεις (1.59) προκύπτουν τα κάθετα φορτία σε κάθε τροχό

$F_{z11} = \frac{Z_1}{2} - \Delta Z_1 = Z_{11}$	(1.60 a)
$F_{z12} = \frac{Z_1}{2} + \Delta Z_1 = Z_{12}$	(1.60 b)
$F_{z21} = \frac{Z_2}{2} - \Delta Z_2 = Z_{21}$	(1.60 c)
$F_{z22} = \frac{Z_2}{2} + \Delta Z_2 = Z_{22}$	(1.60 d)



<u>Σχήμα 1.5</u>: Δυνάμεις Πρόσφυσης στα συστήματα αναφοράς των Τροχών, [1]

1.2.3 Συνισταμένες των Εξωτερικών Δυνάμεων στο Όχημα

Οι συνιστώσες της εξωτερικής συνολικής δύναμης και ροπής, εκπεφρασμένες στο σύστημα αναφοράς του οχήματος με δυο άξονες (και 4 τροχούς), είναι:

Δυνάμεις (εφαρμόζονται στο Κέντρο Μάζας, η Y_α θεωρείται αμελητέα)

$X = X_1 + X_2 - X_a$	(1.61 a)
$Y = Y_1 + Y_2$	(1.61 b)
$Z = Z_1 + Z_2 - m*g + Z_{\alpha 1} + Z_{\alpha 2}$	(1.61 c)

Συνιστώσες των Ροπών (ως προς το κέντρο Μάζας)

$L = -\Delta Z_1 * t_1 - \Delta Z_2 * t_2 + (Y_1 + Y_2) * h$	(1.62 a) x- διεύθυνση (Rolling - Ανατροπή)
$M = -Z_1 * \alpha_1 + Z_2 * \alpha_2 - (X_1 + X_2 - X_\alpha) * h - Z_{\alpha 1} * \alpha_1 + Z_{\alpha 2} * \alpha_2$	(1.62 b) y- διεύθυνση (Pitching)
$N = Y_1 * \alpha_1 - Y_2 * \alpha_2 + \Delta X_1 * t_1 + \Delta X_2 * t_2$	(1.62 c) z- διεύθυνση (Yawing)

(Σημείωση: $Z_{\alpha 1}=Z_1^\alpha$ και $Z_{\alpha 2}=Z_2^\alpha$, βλ. (1.54)).

1.2.4 Εξισώσεις Κίνησης (Δυναμικής Ισορροπίας)

Με βάση τις (1.45), (1.61) και (1.62), διατυπώνονται οι ακόλουθες εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας (κίνησης), στο τοπικό (κινούμενο) σύστημα αναφοράς του Οχήματος:

Δυνάμεις

$m * \alpha_x = X \Rightarrow m * (\dot{u} - v * r) = X_1 + X_2 - X_a$	(1.63 a) Διαμήκης Κίνηση - Κίνηση κατά τον άξονα x
$m * \alpha_y = Y \Rightarrow m * (\dot{v} + u * r) = Y_1 + Y_2$	(1.63 b) Πλευρική Κίνηση - Κίνηση κατά τον άξονα y
$m * \alpha_z = 0 = Z \Rightarrow Z_1 + Z_2 - m * g + Z_{\alpha 1} + Z_{\alpha 2} = 0$	(1.63 c) Δεν υπάρχει κίνηση κατά τον άξονα z

Ροπές

$-J_{xx} * \dot{r} = L \Rightarrow -J_{xx} * \dot{r} = -\Delta Z_1 * t_1 - \Delta Z_2 * t_2 + (Y_1 + Y_2) * h$	(1.63 d)
$-J_{xx} * r^2 = M \Rightarrow -J_{xx} * r^2 = -Z_1 * \alpha_1 + Z_2 * \alpha_2 - (X_1 + X_2 - X_\alpha) * h - Z_{\alpha 1} * \alpha_1 + Z_{\alpha 2} * \alpha_2$	(1.63 e)
$J_z * \dot{r} = N \Rightarrow J_z * \dot{r} = Y_1 * \alpha_1 - Y_2 * \alpha_2 + \Delta X_1 * t_1 + \Delta X_2 * t_2$	(1.63 f)

Συνθήκη μη Ανατροπής (δεν υπάρχει Rolling) – (Ισορροπία των ροπών κατά τον άξονα ***x***)
Δεν υπάρχει Pitching (Ισορροπία των ροπών κατά τον άξονα ***y***)
Περιστροφή (Εκτροπή – Yawing - Rotation around vertical axis ***z***)

Σημειώνεται ότι οι όροι $-J_{zx}*(dr/dt)$ και $-J_{zx}*r^2$ στις εξισώσεις ως προς ***x*** και ***y*** προκύπτουν από τη γενικότερη θεωρία δυναμικής του Στερεού Σώματος. Γενικά, αυτοί οι όροι είναι μικροί.

Από την (1.63 c) προκύπτει

$Z_1 + Z_2 + Z_{\alpha 1} + Z_{\alpha 2} = m*g$	(1.64 a)

Από τις (1.63 b) και (1.63 d)

$-J_{zx}*\dot{r} = -\Delta Z_1*t_1 - \Delta Z_2*t_2 + m*\alpha_y*h \Rightarrow \Delta Z_1*t_1 + \Delta Z_2*t_2 = m*\alpha_y*h + J_{zx}*\dot{r}$	(1.64 b)

Από τις (1.63 a) και (1.63 e)

$-J_{zx}*r^2 = -Z_1*\alpha_1 + Z_2*\alpha_2 - m*\alpha_x*h - Z_{\alpha 1}*\alpha_1 + Z_{\alpha 2}*\alpha_2$ $\Rightarrow Z_1*\alpha_1 - Z_2*\alpha_2 + Z_{\alpha 1}*\alpha_1 - Z_{\alpha 2}*\alpha_2 = -m*\alpha_x*h + J_{zx}*r^2$	(1.64 c)

Ορίζουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

$N_Y = Y_1*\alpha_1 - Y_2*\alpha_2$	(1.65 a)
$N_X = \Delta X_1*t_1 + \Delta X_2*t_2$	(1.65 b)

Τότε, η (1.63 f) γράφεται ως

$J_z*\dot{r} = N_X + N_Y = N$	(1.66)

Χρησιμοποιώντας την (1.61 b) και την (1.65 a) υπολογίζονται οι πλευρικές δυνάμεις πρόσφυσης

$Y_1 = \frac{Y*\alpha_2 + N_Y}{l} = \frac{Y*\alpha_2^b}{l}$	(1.67 a)
$Y_2 = \frac{Y*\alpha_1 - N_Y}{l} = \frac{Y*\alpha_1^b}{l}$	(1.67 b)
$x_N = \frac{N_Y}{Y}$	(1.68)
$\alpha_1^b = \alpha_1 - x_N, \alpha_2^b = \alpha_2 + x_N$	(1.68 b)

Μια ισοδύναμη μορφή είναι

$Y_1 = \frac{m*\alpha_y*\alpha_2}{l} + \frac{N - N_X}{l}$	(1.69 a)
$Y_2 = \frac{m*\alpha_y*\alpha_1}{l} - \frac{N - N_X}{l}$	(1.69 b)

Στις περισσότερες κλασσικές εφαρμογές γίνεται η προσέγγιση $N_X \approx 0 \rightarrow N = J_z * (dr/dt) = N_Y$. Η προσέγγιση είναι γενικά ακριβής εκτός από τις περιπτώσεις όπου
α) Το όχημα διαθέτει limited slip (or locked) differential
β) Έχει ενεργοποιημένο ESP (Electronic Stability Programme ή Electronic Stability Control - ηλεκτρονικό πρόγραμμα ευστάθειας ή ηλεκτρονικός έλεγχος ευστάθειας)
γ) Φρενάρει με μπλοκαρισμένους τροχούς σε οδόστρωμα με διαφορετικό συντελεστή τριβής αριστερά και δεξιά.

1.2.5 Διαμήκης Μεταφορά των Φορτίων (εμπρός – πίσω)

Από τις (1.64 c) και (1.63 e) έχουμε

$Z_1 = Z_1^0 + \Delta Z - Z_1^a$	(1.70 a)
$Z_2 = Z_2^0 - \Delta Z - Z_2^a$	(1.70 b)
$\Delta Z = -\frac{m * \alpha_x * h}{l} + \frac{J_{zz} * r^2}{l}$	(1.71 a)
$Z_1^0 = \frac{m * g * \alpha_2}{l}$	(1.71 b)
$Z_2^0 = \frac{m * g * \alpha_1}{l}$	(1.71 c)

όπου

ΔZ	διαμήκης μεταφορά (κατακόρυφου) φορτίου (longitudinal load transfer) εξαιτίας της επιτάχυνσης (αρνητική τιμή του ΔZ σημαίνει μεταφορά προς τα πίσω)
Z_1^0	στατικά φορτία των αξόνων
Z_2^0	στατικά φορτία των αξόνων

Κατά την διάρκεια της κίνησης τα κατακόρυφα φορτία αλλάζουν όταν υπάρχουν επιταχύνσεις. Στη περίπτωση σημαντικών αεροδυναμικών φορτίων, τα κατακόρυφα φορτία επηρεάζονται και από την ταχύτητα.

1.2.6 Πλευρική Μεταφορά των Φορτίων (αριστερά – δεξιά)

Η πλευρική μεταφορά των φορτίων εμφανίζεται στις εξισώσεις (1.63 d), (1.64 b)

$$-J_{zz} * \dot{r} = L \Rightarrow -J_{zz} * \dot{r} = -\Delta Z_1 * t_1 - \Delta Z_2 * t_2 + (Y_1 + Y_2) * h$$

ή ισοδύναμα

$$-J_{zz} * \dot{r} = -\Delta Z_1 * t_1 - \Delta Z_2 * t_2 + m * \alpha_y * h \Rightarrow \Delta Z_1 * t_1 + \Delta Z_2 * t_2 = m * \alpha_y * h + J_{zz} * \dot{r}$$

Μια εξίσωση δεν είναι αρκετή για να υπολογισθούν τα ΔZ_1, ΔZ_2. Το ίδιο ισχύει και για τις συνθήκες στατικής ισορροπίας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πρόβλημα είναι στατικά αόριστο (statically indeterminate). Τα οχήματα κατασκευάζονται έτσι ώστε σε συνθήκες στατικής ισορροπίας, η πλευρική μεταφορά των φορτίων να είναι αμελητέα. Επίσης, η γεωμετρία και οι ελαστικές ιδιότητες των αναρτήσεων επηρεάζουν τον λόγο $\Delta Z_1/\Delta Z_2$. Ο ακριβής υπολογισμός της πλευρικής μεταφοράς των φορτίων, λαμβάνει υπ' όψη τις ελαστικές παραμορφώσεις των αναρτήσεων και των ελαστικών.

1.2.7 Κατακόρυφα φορτία στους τροχούς

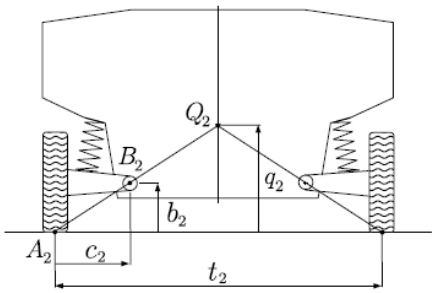
Με την βοήθεια των σχέσεων (1.60 a), (1.60 b), (1.60 c), (1.60 d), (1.70 a) και (1.70 b) προκύπτουν τα κατακόρυφα φορτία στους τροχούς

$F_{z11} = Z_{11} = \frac{Z_1^0 + \Delta Z - Z_1^a}{2} - \Delta Z_1$	(1.72 a)
$F_{z12} = Z_{12} = \frac{Z_1^0 + \Delta Z - Z_1^a}{2} + \Delta Z_1$	(1.72 b)
$F_{z21} = Z_{21} = \frac{Z_2^0 - \Delta Z - Z_2^a}{2} - \Delta Z_2$	(1.72 c)
$F_{z22} = Z_{22} = \frac{Z_2^0 - \Delta Z - Z_2^a}{2} + \Delta Z_2$	(1.72 d)

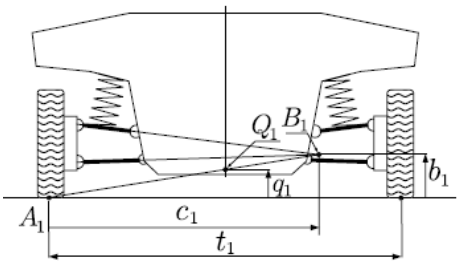
1.3 1ης ΤΑΞΗΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1.3.1 Εισαγωγή και Βασικές Παραδοχές

α) Οι ελαστικές παραμορφώσεις των αναρτήσεων και του οδοστρώματος θεωρούνται αμελητέες στις εξισώσεις ισορροπίας (θεωρία 1ης τάξης).
β) Το όχημα στο αρχικό σύστημα αναφοράς (απ' όπου μετράμε τις παραμορφώσεις και τις μετατοπίσεις) κινείται σε ευθεία με σταθερή ταχύτητα.
γ) Εξετάζουμε δύο διαφορετικές διατάξεις αναρτήσεων βλ. **Σχήμα 1.6** και **Σχήμα 1.7**.
δ) Η διάταξη των αναρτήσων είναι πλήρως συμμετρική ως προς το κεντροβαρικό επίπεδο ***xz***.



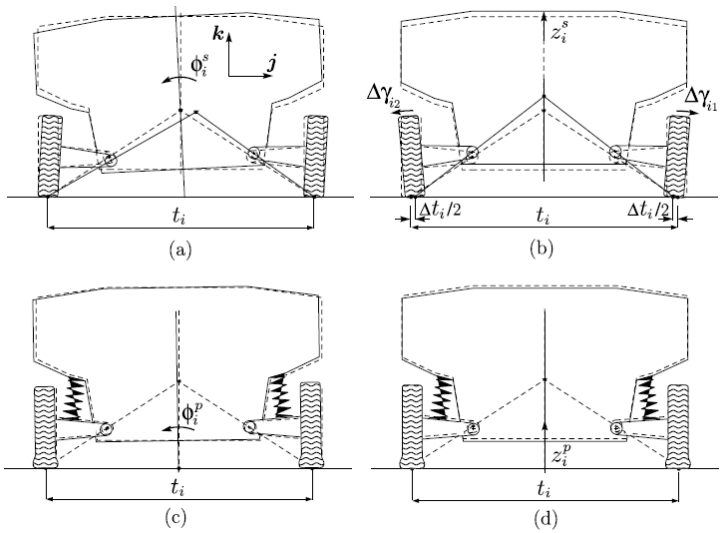
Σχήμα 1.6: Σύστημα αναρτήσεων τύπου swing axle στο αρχικό σύστημα αναφοράς, [1]



Σχήμα 1.7: Σύστημα αναρτήσεων τύπου double wishbone στο αρχικό σύστημα αναφοράς, [1]

Η διάταξη του Σχήματος 1.6 έχει αναρτήσεις τύπου swing axle και η διάταξη του Σχήματος 1.7 έχει αναρτήσεις τύπου double wishbone (διπλά ψαλίδια). Το όχημα έχει πίσω ανάρτηση τύπου swing axle και εμπρός ανάρτηση double wishbone. Τα σημεία $\boldsymbol{A_i}$ είναι κατά προσέγγιση τα κέντρα των πελμάτων των ελαστικών (Footprint Centers or Contact Patch Centers). Τα σημεία $\boldsymbol{B_i}$ είναι τα στιγμιαία κέντρα περιστροφής (instantaneous centers of rotation) της πλήμνης των τροχών (wheel hubs), σε σχέση με το αμάξωμα (δεν είναι τα απόλυτα στιγμιαία κέντρα περιστροφής, αλλά εδώ ενδιαφέρει η σχετική κίνηση του τροχού σε σχέση με το αμάξωμα).Οι συνδέσεις των αναρτήσεων υποθέτονται επιπέδες και άκαμπτες. Άρα, οι βαθμοί ελευθερίας είναι μετατοπίσεις πάνω στο επίπεδο $\boldsymbol{yz}$ και στροφές ως προς τον άξονα $\boldsymbol{x}$. Εκ κατασκευής, το σημείο $\boldsymbol{B_2}$ στην ανάρτηση τύπου swing arm (βλ. Σχήμα 1.6) είναι η άρθρωση του βραχίονα πάνω στο αμάξωμα. Για την ανάρτηση τύπου double wishbone, το κέντρο περιστροφής $\boldsymbol{B_1}$ βρίσκεται στην προέκταση των δύο θεωρητικών ράβδων που δημιουργούνται, αν προσομοιωθεί η διάταξη με έναν (επίπεδο) μηχανισμό τεσσάρων ράβδων, βλ, **Σχήμα 1.7**. Τα μήκη $\boldsymbol{c_i}$,$\boldsymbol{b_i}$ ορίζουν τις θέσεις των $\boldsymbol{B_i}$ σε σχέση με τα σημεία $\boldsymbol{A_i}$ (θέσεις στιγμιαίων κέντρων περιστροφής σε σχέση με τα σημεία επαφής τροχού – οδοστρώματος). Τα μήκη $\boldsymbol{t_1}$,$\boldsymbol{t_2}$ είναι το εμπρός και πίσω μετατρόχιο αντίστοιχα. Τα (σημαντικά) σημεία $\boldsymbol{Q_1}$,$\boldsymbol{Q_2}$ είναι οι τομές των ευθειών που συνδέουν τα σημεία $\boldsymbol{B_i}$ και $\boldsymbol{A_i}$ από τις δύο πλευρές (εμπρός είναι το $\boldsymbol{Q_1}$ και πίσω το $\boldsymbol{Q_2}$). Λόγω συμμετρίας, τα $\boldsymbol{Q_1}$,$\boldsymbol{Q_2}$ είναι πάνω στο κεντροβαρικό επίπεδο $\boldsymbol{xz}$, σε ύψη $\boldsymbol{q_1}$,$\boldsymbol{q_2}$ αντίστοιχα, από το οδόστρωμα. Τα $\boldsymbol{Q_1}$,$\boldsymbol{Q_2}$ καλούνται κέντρα κλυδωνισμού (roll centers) και η θέση τους διαδραματίζει θεμελιώδη ρόλο στη δυναμική του οχήματος.

1.3.1α Εσωτερικές Συντεταγμένες (βαθμοί ελευθερίας) των Αναρτήσεων



Σχήμα 1.8: Εσωτερικές παράμετροι (συντεταγμένες) οι οποίες μετρούν τις παραμορφώσεις των αναρτήσεων, [1]

Για κάθε άξονα, χρειάζονται τέσσερις (4) εσωτερικές συντεταγμένες για να προσδιορισθεί η παραμόρφωση των αναρτήσεων (δηλ., η αλλαγή κατάστασης, σε σχέση με την διάταξη αναφοράς – reference configuration). Μια κλάση τέτοιων εσωτερικών συντεταγμένων (βαθμών ελευθερίας) αποτελείται από τα ακόλουθα μεγέθη:

Μέγεθος	Ορισμός
φ_1^s	Γωνία περιστροφής (Body roll angle) αμαξώματος, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των αναρτήσεων.
φ_1^P	Γωνία περιστροφής (Body roll angle) εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των ελαστικών.

z_i^s	Κατακόρυφη μετατόπιση αμαξώματος (Body vertical displacement), στα πίσω και εμπρός κέντρα των μετατροχίων, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των αναρτήσεων (αυτό δίνει και μεταβολή στο θεωρητικό μετατρόχιο - track variation, Δt_i και στις γωνίες Camber γ_{ij}).
z_i^p	Κατακόρυφη μετατόπιση αμαξώματος (Body vertical displacement), στα πίσω και εμπρός κέντρα των μετατροχίων, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των ελαστικών.

Αυτές οι τέσσερις συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το Σχήμα 1.8 δείχνει (για αναρτήσεις τύπου swing arm, αλλά χωρίς βλάβη της γενικότητας), τον τρόπο που η κάθε μια συντεταγμένη επηρεάζει τις παραμορφώσεις και αλλάζει την μορφή της διάταξης του οχήματος. Για μικρές μετατοπίσεις, η σχέση μεταξύ της κατακόρυφης μετατόπισης αμαξώματος στα πίσω και εμπρός κέντρα των μετατροχίων, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των αναρτήσεων και της μεταβολής του μετατροχίου δίνεται από την σχέση

$z_s^1 = -\frac{c_i}{2*b_i}*\Delta t_i = -\frac{t_i}{4*q_i}*\Delta t_i$	(1.73)

<u>Μεταβολή της γωνίας Κάμπερ (Camber Angle)</u>

Σε επίπεδο ανάλυσης 1ης τάξης, η μεταβολή στη γωνία Κάμπερ, δίνεται από τις σχέσεις
α) (1.74) όπου όλες οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στην διάταξη αναφοράς (reference configuration).
β) (1.75 a),(1.75 b),(1.75 c) και (1.75 d) για συμμετρική επίπεδη ανάρτηση

$\Delta\gamma_{ij} = \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\varphi_i^s}*\varphi_i^s + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\Delta t_i}*\Delta t_i + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\varphi_i^p}*\varphi_i^p + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial z_i^p}*z_i^p$	(1.74)
$\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\varphi_i^s} = -\frac{\frac{t_i}{2}-c_i}{c_i} = -\frac{q_i-b_i}{b_i}$	(1.75 a)
$\frac{\partial\gamma_{i1}}{\partial\Delta t_i} = -\frac{\partial\gamma_{i1}}{\partial\Delta t_i} = \frac{1}{2*b_i}$	(1.75 b)
$\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\varphi_i^p} = 1$	(1.75 c)
$\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial z_i^p} = 0$	(1.75 d)

Αν αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις (1.75) στην (1.74) προκύπτει

$\Delta\gamma_{i1} = -\left(\frac{q_i-b_i}{b_i}\right)*\varphi_i^s + \frac{1}{2*b_i}*\Delta t_i + \varphi_i^p$	(1.76 a)
$\Delta\gamma_{i2} = -\left(\frac{q_i-b_i}{b_i}\right)*\varphi_i^s - \frac{1}{2*b_i}*\Delta t_i + \varphi_i^p$	(1.76 b)

Η παραπάνω σχέση (1.76) είναι ακριβής για μικρές στροφές και μετατοπίσεις καθώς επίσης και για μικρές γωνίες διεύθυνσης δ_{ij}.

Εσωτερικές συντεταγμένες οχήματος

Για να προσδιοριστεί η κατάσταση του αμαξώματος (δηλαδή των αναρτημένων μαζών) του οχήματος, είναι αναγκαίες γενικά τρεις (3) εσωτερικές συντεταγμένες. Οι συντεταγμένες προσδιορίζονται σε σχέση με την αρχική, στατική διάταξη. Πιθανές επιλογές είναι:
α) Γωνία roll $\boldsymbol{\varphi}$ (περιστροφής - Body roll angle) και κατακόρυφη μετατόπιση z_i στα εμπρός και πίσω κέντρα των μετατροχίων.
β) Γωνία roll $\boldsymbol{\varphi}$ (περιστροφής - Body roll angle)και μεταβολές στα εμπρός και πίσω μετατρόχια Δt_i.
Το αμάξωμα (ως αναρτώμενη μάζα) θεωρείται στερεό σώμα. Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις «συμβιβαστού» των παραμορφώσεων,

$\varphi = \varphi_i^s + \varphi_i^p$	(1.77 a)
$z = z_i^s + z_i^p$	(1.77 b)

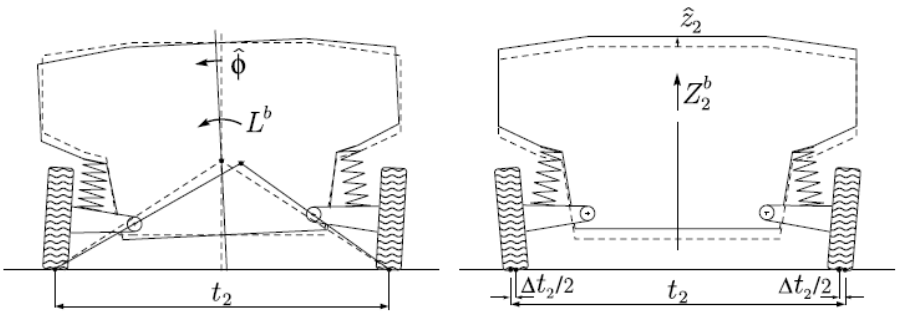
όπου $i = 1,2$

1.3.1β Ακαμψίες Περιστροφής και κατακόρυφες ακαμψίες (Roll and Vertical Stiffnesses)

Τονίζεται ότι η συμμετρική συμπεριφορά των δύο αναρτήσεων στον ίδιο άξονα παίζει σημαντικό ρόλο στην παρακάτω θεωρία.

Ακαμψίες Περιστροφής (Roll Stiffnesses)

Εφαρμόζεται μια καθαρή ροπή $L^b = L^b * i$ (Ροπή ανατροπής - Roll Moment) στο αμάξωμα, βλ. **Σχήμα 1.9**.



Σχήμα 1.9: Επιβολή καθαρής ροπής ανατροπής [1]

Ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη

Μέγεθος	Ορισμός
$\hat{\varphi}$	γωνία περιστροφής
k_φ	Γενική Ακαμψία Περιστροφής του αμαξώματος
k_{φ_1}	Ισοδύναμη ακαμψία Περιστροφής εμπρός
k_{φ_2}	Ισοδύναμη ακαμψία Περιστροφής πίσω
ΔZ_1^L	εμπρός πλευρικές μεταφορές των κατακόρυφων φορτίων
ΔZ_2^L	πίσω πλευρικές μεταφορές των κατακόρυφων φορτίων

Η διάταξη των στροφικών ακαμψιών, εμπρός και πίσω μοντελοποιείται ως δύο παράλληλα στροφικά ελατήρια.

$L^b = k_\varphi * \hat{\varphi} = (k_{\varphi 1} + k_{\varphi 2}) * \hat{\varphi}$	(1.78)
$\Delta Z_1^L * t_1 = k_{\varphi 1} * \hat{\varphi} = L_1^b$	(1.79 a)
$\Delta Z_2^L * t_2 = k_{\varphi 2} * \hat{\varphi} = L_2^b$	(1.79 b)

Οι εμπρός και πίσω πλευρικές μεταφορές των κατακόρυφων φορτίων εξαρτώνται από τις συνδυασμένες μετατοπίσεις λόγω αναρτήσεων και παραμόρφωσης των ελαστικών.

Ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη

Μέγεθος	Ορισμός
$k_{\varphi_i}^s$	Ακαμψία περιστροφής λόγω της ανάρτησης (suspension roll stiffnesses)
$k_{\varphi_i}^P$	Ακαμψία περιστροφής λόγω παραμόρφωσης των ελαστικών (tire roll stiffnesses)
φ_i^s	Γωνία περιστροφής (Body roll angle) αμαξώματος, εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των αναρτήσεων.
φ_i^P	Γωνία περιστροφής (Body roll angle) εξαιτίας μόνο των παραμορφώσεων των ελαστικών.
k_{φ_i}	ολική (ισοδύναμη) ακαμψία
p_1	κάθετη (κατακόρυφη) ακαμψία των εμπρός τροχών με ελαστικό
p_2	κάθετη (κατακόρυφη) ακαμψία των πίσω τροχών με ελαστικό

Και ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$\Delta Z_i^L * t_i = k_{\varphi i} * \hat{\varphi} = k_{\varphi i} * (\varphi_i^s + \varphi_i^P) = k_{\varphi i} * \varphi_i^s + k_{\varphi i} * \varphi_i^P$	(1.80)
$\Delta Z_i^L * t_i = k_{\varphi i} * \hat{\varphi} = k_{\varphi_i}^s * \varphi_i^s = k_{\varphi_i}^P * \varphi_i^P = L_i^b$	(1.81)
$k_{\varphi i} = \dfrac{k_{\varphi_i}^s * k_{\varphi_i}^P}{k_{\varphi_i}^s + k_{\varphi_i}^P}$	(1.82)
$\Delta Z_i^L * t_i = k_{\varphi_i}^P * \hat{\varphi}_i^P = \dfrac{p_i * t_i^2}{2} * \hat{\varphi}_i^P$	(1.83)
$k_{\varphi_i}^P = \dfrac{p_i * t_i^2}{2}$	(1.84)

Οι παραπάνω σχέσεις στηρίζονται στο γεγονός ότι τα ελαστικά και οι αναρτήσεις στον ίδιο άξονα, συμπεριφέρονται ως ελατήρια εν σειρά, ενώ οι συνολικές ακαμψίες εμπρός – πίσω συμπεριφέρονται ως ελατήρια παράλληλα.

<u>Κατακόρυφες Ακαμψίες (Vertical Stiffnesses)</u>

Εφαρμόζεται ένα μικρό κατακόρυφο φορτίο $Z_1^b = Z_1^b * k$, στο αμάξωμα, ακριβώς στο μέσον, πάνω από τον εμπρόσθιο άξονα.

Ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη

Μέγεθος	Ορισμός
k_{z_1}	γενική κατακόρυφη ακαμψία εμπρός
k_{z_2}	γενική κατακόρυφη ακαμψία πίσω
k_{zi}^{p}	κατακόρυφη ακαμψία ελαστικών ανά άξονα (έχουμε 2 τροχούς ανά άξονα) (Tire Vertical stiffness)
k_{zi}^{s}	κατακόρυφη ακαμψία των αναρτήσεων (Suspension vertical stiffness)
$\hat{z}_i^s$	κατακόρυφες μετατοπίσεις των κέντρων εξαιτίας των αναρτήσεων
$\hat{z}_i^p$	κατακόρυφες μετατοπίσεις των κέντρων εξαιτίας των παραμορφώσεων του ελαστικού.

Και ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$Z_1^b = k_{z1} * \hat{z}_1$	(1.85)
$Z_2^b = k_{z2} * \hat{z}_2$	(1.86)
$k_{zi}^p = 2 * p_i$	(1.87)
$k_{z_i} = \dfrac{k_{z_i}^s * k_{z_i}^p}{k_{z_i}^s + k_{z_i}^p}$	(1.88)
$Z_i^b = k_{z_i} * \hat{z}_i = k_{z_i}^s * \hat{z}_i^s = k_{z_i}^p * \hat{z}_i^p$	(1.89)
$\hat{z}_i = \hat{z}_i^s + \hat{z}_i^p$	(1.90)

Στις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιείται ο συμβολισμός (***x με «καπελάκι»***, αντί ***x***), σε όλες τις κινηματικές μεταβλητές, για να δειχθεί ότι δεν είναι αναγκαίο να είναι οι πραγματικές τιμές που θα έχουμε σε συνθήκες λειτουργίας. Όμως, λόγω της αρχής της επαλληλίας (γραμμική θεωρία) οι τύποι υπολογισμού παραμένουν οι ίδιοι (απλά, σε συνθήκες λειτουργίας, όλες οι μεταβλητές παίρνουν συνήθως μη μηδενικές τιμές).

1.3.2 Εσωτερική Ισορροπία των αναρτήσεων

Οι δυνάμεις που ασκούνται από το οδόστρωμα μεταφέρονται στο αμάξωμα μέσω των αναρτήσεων. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το ποσοστό των φορτίων που περνούν κατευθείαν από τις στηρίξεις των αναρτήσεων και το ποσοστό των φορτίων που περνούν από τα ελατήρια και τους αποσβεστήρες (το ποσοστό αυτό δημιουργεί τις σχετικές μετατοπίσεις στις αναρτήσεις – suspension deflections).

1.3.2α Επίδραση πλευρικών φορτίων

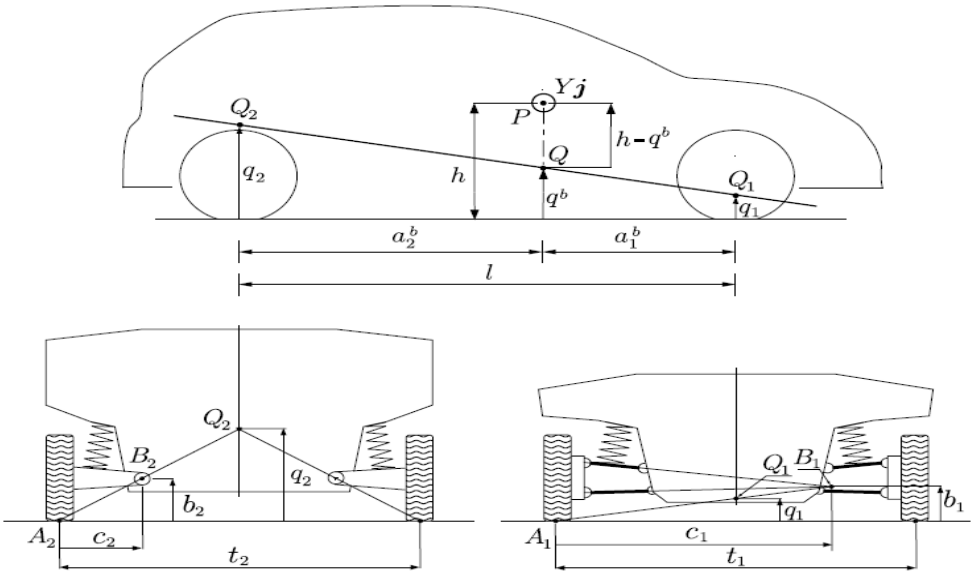
Εφαρμόζουμε ένα πλευρικό φορτίο ***-Y*j=-m*α$_y$*j*** σε ύψος ***h*** και σε αποστάσεις από τον εμπρόσθιο και από τον πίσω άξονα, (βλ. **Σχήμα 1.10**)

Ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη και ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

Μέγεθος	Ορισμός
a_1^b	απόσταση από τον εμπρόσθιο άξονα
a_2^b	απόσταση από τον πίσω άξονα

$Y_1 = \frac{Y*\alpha_2 + N_Y}{l} = \frac{Y*\alpha_2^b}{l}$	(1.91 a)
$Y_2 = \frac{Y*\alpha_1 - N_Y}{l} = \frac{Y*\alpha_1^b}{l}$	(1.91 b)
$\Delta Z_1*t_1 + \Delta Z_2*t_2 = m*\alpha_y*h + J_{xx}*\dot{r}$	(1.92)
$\varphi = \varphi_1^s + \varphi_1^p = \varphi_2^s + \varphi_2^p$	(1.93)
$\Delta Z_1*t_1 = k_{\varphi 1}^p*\varphi_1^p$	(1.94 a)
$\Delta Z_2*t_2 = k_{\varphi 2}^p*\varphi_2^p$	(1.94 b)
$k_{\varphi 1}^p*\varphi_1^p + k_{\varphi 2}^p*\varphi_2^p \approx Y*h$	(1.95)

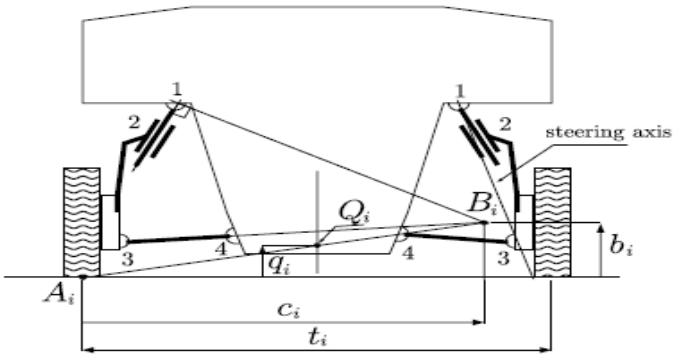
Όμως, για τον υπολογισμό των ***ΔZ₁*t₁*** και ***ΔZ₂*t₂***, πρέπει να γίνει βαθύτερη ανάλυση της κινηματικής των αναρτήσεων.



<u>Σχήμα 1.10: Κέντρα μη περιστροφής και Άξονας μη περιστροφής (No roll Centers, No roll Axis) [1]</u>

<u>1.3.2β Κέντρα μη Περιστροφής και Άξονας μη Περιστροφής</u>

Για την δημοφιλή ανάρτηση τύπου MacPherson (strut), βλ. **Σχήμα 1.11**, το κέντρο περιστροφής βρίσκεται ως εξής: Χαράζονται δύο ευθείες, η μια ανάμεσα στις αρθρωτές συνδέσεις 3 και 4 και η άλλη πάνω στη σύνδεση 1 και κάθετα στην κίνηση του ολισθητή της κινητής σύνδεσης, βλ. **Σχήμα 1.11**. Υπενθυμίζεται ότι ο ολισθητής της σύνδεσης MacPherson είναι συνήθως ο αποσβεστήρας (εντός του ελατηρίου, βλ. **Σχήμα 1.12**). Η τομή των δύο ευθειών που συνδέουν τα A_i και B_i από τις δύο πλευρές, είναι τα κέντρα περιστροφής Q_i, τα οποία ορίζουν τον άξονα περιστροφής (Roll Axis). Η κάθετη απόσταση του Q_i από το οδόστρωμα, καλείται q_i και θεωρείται θετική ποσότητα αν το Q_i είναι πάνω από το οδόστρωμα και αρνητική αν το Q_i είναι κάτω από το οδόστρωμα. Για ένα όχημα δύο αξόνων ορίζονται δύο κέντρα περιστροφής, Q_1,Q_2. Ο άξονας περιστροφής είναι η ευθεία Q_1-Q_2, βλ. **Σχήμα 1.10**. Μια βασική υπόθεση είναι ότι, η κίνηση του τροχού σε σχέση με το αμάξωμα, είναι επίπεδη και έχει μόνο έναν βαθμό ελευθερίας. Επίσης, τα σημεία A_i δεν επηρεάζονται από τις κάθετες ελαστικές ιδιότητες του ελαστικού (κάθετες ακαμψίες p_1 και p_2).



<u>Σχήμα 1.11</u>: Κέντρο μη περιστροφής ανάρτησης MacPherson, [1]

<u>Σχήμα 1.12</u>: Ανάρτηση MacPherson, [1]

Ως εκ τούτου τα σημεία Q_i θα μπορούσαν να ονομασθούν κέντρα μη περιστροφής. Μια πλευρική δύναμη, η οποία εφαρμόζεται πάνω στο άξονα περιστροφής, είναι ισοδύναμη με δύο δυνάμεις Y_1,Y_2 πάνω στα άκρα Q_1,Q_2 οι οποίες ικανοποιούν τις (1.92). Γενικότερα, μια δύναμη η οποία εφαρμόζεται οπουδήποτε πάνω στον άξονα περιστροφής δεν δημιουργεί γωνία περιστροφής λόγω παραμόρφωσης της ανάρτησης. Η γωνία περιστροφής που δημιουργείται οφείλεται αποκλειστικά στη παραμόρφωση των ελαστικών. Ανάλογα με την διεύθυνση της δύναμης, μπορεί να έχουμε όμως κατακόρυφες μετατοπίσεις z_1, z_2.
Έστω ότι στο σημείο ***P***, το οποίο βρίσκεται σε ύψος ***h*** από το οδόστρωμα, εφαρμόζεται μια δύναμη ***-Y*j***. Τότε η ***-Y*j*** μπορεί να μεταφερθεί πάνω στον άξονα περιστροφής, ο οποίος στη θέση του ***P***, έχει ύψος q_b από το οδόστρωμα, βλ. **Σχήμα 1.10**. Η δύναμη ***-Y*j*** ουσιαστικά προσομοιώνει την φυγόκεντρη δύναμη $-m*\alpha_y*j$ η οποία εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας, συν μια ροπή περιστροφής (roll moment) η οποία οφείλεται στις σχέσεις (1.65), (1.66)

$N_Y = Y_1 * a_1 - Y_2 * a_2 = J_z * \dot{r} - N_X = J_z * \dot{r} - \Delta X_1 * t_1 - \Delta X_2 * t_2$	(1.96)

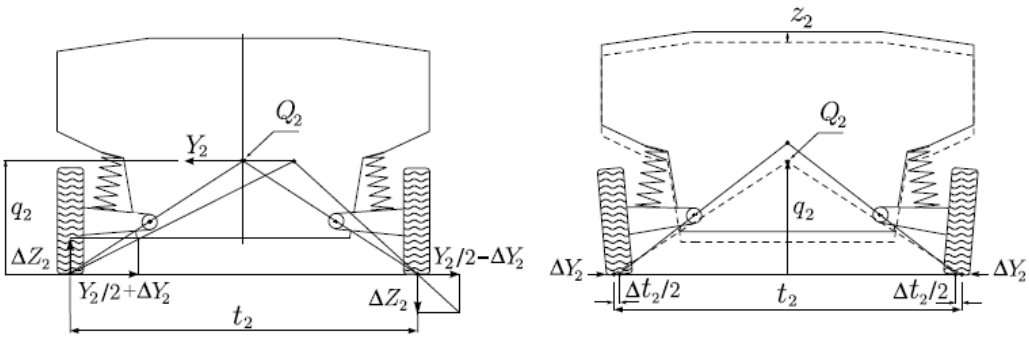
Αν η ποσότητα N_Y δεν είναι μηδέν, τότε η ισοδύναμη πλευρική δύναμη $-m*\alpha_y*j$ είναι μετατοπισμένη οριζόντια (στο σημείο ***P***), σύμφωνα με τις (1.67), (1.68). Αν $N_Y = 0$, τότε, προφανώς, το ***P*** συμπίπτει με το κέντρο μάζας. Μετατοπίζοντας τώρα την ***-Y*j*** από το ***P***, πάνω στον άξονα περιστροφής πρέπει να προστεθεί και μια επιπλέον ροπή περιστροφής L_b*i που προκαλεί τις γωνίες περιστροφής. Επίσης η δυναμη ***-Y*j*** είναι ισοδύναμη με δύο δυνάμεις: $-Y_1*j$ στο Q_1 και $-Y_2*j$ στο Q_2

Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$L^b * i = Y * (h - q^b) * i = m * \alpha_y * (h - q^b) * i$	(1.97)
$q^b = \frac{a_2^b * q_1 + a_1^b * q_2}{a_1^b + a_2^b} = \frac{a_2^b * q_1 + a_1^b * q_2}{l}$	(1.98)
$Y_1 * a_1^b = Y_2 * a_2^b$	(1.99)
$Y * q^b = Y_1 * q_1 + Y_2 * q_2$	(1.100)
$Y * (h - q^b) = k_{\varphi_1}^s * \varphi_1^s + k_{\varphi_2}^s * \varphi_2^s = \Delta Z_1^L * t_1 + \Delta Z_2^L * t_2$	(1.101)
$\Delta Z_i * t_i = \Delta Z_i^Y * t_i + \Delta Z_i^L * t_i = Y_i * q_i + k_{\varphi_i}^s * \varphi_1^s = k_{\varphi_i}^p * \varphi_1^p$	(1.102)

1.3.2γ Περιστροφή και ανύψωση της ανάρτησης

Ακόμη κι όταν η δύναμη περνά από τον άξονα περιστροφής, υπάρχει γωνία περιστροφής λόγω του όρου $\Delta Z_i^Y * t_i$ ο οποίος προκαλεί κάθετη παραμόρφωση στα ελαστικά (λόγω της ροπής $\Delta Z_i^Y * t_i$). Επίσης, οι εγκάρσιες δυνάμεις - αντιδράσεις στα ελαστικά, αριστερά και δεξιά δεν είναι ίσες (η διαφορά τους έχει να κάνει με τα κάθετα φορτία, τις αντίστοιχες τιμές ολισθήσεων και γενικότερα, την συμπεριφορά των ελαστικών). Συγκεκριμένα, οι αντιδράσεις στα ελαστικά θα είναι $(Y_i/2) \pm \Delta Y_i$, βλ. Σχήμα (1.13) και αυτό δημιουργεί την ακόλουθη κατακόρυφη μετατόπιση του αμαξώματος.



Σχήμα 1.13. Παραμόρφωση αναρτήσεων λόγω οριζόντιου πλευρικού φορτίου ΔY_i , [1]

Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$\Delta Z_i^Y * t_i = Y_i * q_i = k_{\varphi_i}^p * \varphi_1^p$	(1.103)
$z_i^s = \Delta Y_i * \frac{2 * b_i}{k_{z_i}^s * c_i} = \Delta Y_i * \frac{4 * q_i}{k_{z_i}^s * t_i}$	(1.104)
$\Delta t_i = -\frac{2 * b_i}{c_i} * z_i^s = -\frac{4 * q_i}{t_i} * z_i^s = -\left(\frac{4 * q_i}{t_i}\right)^2 * \frac{\Delta Y_i}{k_{z_i}^s}$	(1.105)

Είναι αξιοσημείωτο ότι στις (1.104) και (1.105) δεν υπεισέρχεται η κατακόρυφη ακαμψία του ελαστικού.

1.3.2δ Μεταφορές Φορτίων

Συνοψίζοντας, σε συνθήκες λειτουργίας, ο υπολογισμός των γωνιών περιστροφής (roll angles) γίνεται με βάση τις εξισώσεις

$Y_1 = \frac{Y*\alpha_2 + N_Y}{l} = \frac{Y*\alpha_2^b}{l}$	(1.110)
$Y_2 = \frac{Y*\alpha_1 - N_Y}{l} = \frac{Y*\alpha_1^b}{l}$	(1.111)
$\varphi = \varphi_1^s + \varphi_1^p = \varphi_2^s + \varphi_2^p$	(1.106)
$Y*(h - q^b) = k_{\varphi_1}^s * \varphi_1^s + k_{\varphi_2}^s * \varphi_2^s$	(1.107)
$Y_1 * q_1 + k_{\varphi_1}^s * \varphi_1^s = k_{\varphi_1}^p * \varphi_1^p$	(1.108)
$Y_2 * q_2 + k_{\varphi_2}^s * \varphi_2^s = k_{\varphi_2}^p * \varphi_2^p$	(1.109)
$N_Y = Y_1 * a_1 - Y_2 * a_2 = J_z * \dot{r} - N_X = J_z * \dot{r} - \Delta X_1 * t_1 - \Delta X_2 * t_2$	(1.112)
$Y = Y_1 + Y_2 = m * \alpha_y$	(1.113)

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω σχέσεων προκύπτουν οι γωνίες περιστροφής (roll angles) που οφείλονται στις παραμορφώσεις των ελαστικών και οι γωνίες περιστροφής (roll angles) που οφείλονται στις παραμορφώσεις των αναρτήσεων

$\varphi_1^p = \frac{1}{k_{\varphi_1}^p} * \frac{k_{\varphi_1} * k_{\varphi_2}}{k_\varphi} * \left[\frac{Y*(h - q^b)}{k_{\varphi_2}} + \frac{Y_1 * q_1}{k_{\varphi_1}^s} + \frac{Y_1 * q_1}{k_{\varphi_2}^s} + \frac{Y_1 * q_1 + Y_2 * q_2}{k_{\varphi_2}^p} \right]$	(1.114)
$\varphi_2^p = \frac{1}{k_{\varphi_2}^p} * \frac{k_{\varphi_1} * k_{\varphi_2}}{k_\varphi} * \left[\frac{Y*(h - q^b)}{k_{\varphi_1}} + \frac{Y_2 * q_2}{k_{\varphi_1}^s} + \frac{Y_2 * q_2}{k_{\varphi_2}^s} + \frac{Y_1 * q_1 + Y_2 * q_2}{k_{\varphi_1}^p} \right]$	(1.115)
$\varphi_1^s = \frac{1}{k_{\varphi_1}^s} * \frac{k_{\varphi_1} * k_{\varphi_2}}{k_\varphi} * \left[\frac{Y*(h - q^b)}{k_{\varphi_2}} - \frac{Y_1 * q_1}{k_{\varphi_1}^p} + \frac{Y_2 * q_2}{k_{\varphi_2}^p} \right]$	(1.116)
$\varphi_2^s = \frac{1}{k_{\varphi_2}^s} * \frac{k_{\varphi_1} * k_{\varphi_2}}{k_\varphi} * \left[\frac{Y*(h - q^b)}{k_{\varphi_1}} + \frac{Y_1 * q_1}{k_{\varphi_1}^p} - \frac{Y_2 * q_2}{k_{\varphi_2}^p} \right]$	(1.117)
$k_\varphi = k_{\varphi_1} + k_{\varphi_2} = \frac{k_{\varphi_1}^s * k_{\varphi_1}^p}{k_{\varphi_1}^s + k_{\varphi_1}^p} + \frac{k_{\varphi_2}^s * k_{\varphi_2}^p}{k_{\varphi_2}^s + k_{\varphi_2}^p}$	(1.118)

Αν το q_b είναι σταθερό ($q_1=q_2$), τότε η ποσότητα N_Y δεν επηρεάζει σημαντικά την γωνία περιστροφής φ. Όμως, η N_Y επηρεάζει τις πλευρικές μεταφορές των δυνάμεων, αφού αλλάζει τις τιμές των Y_1 και Y_2.

<u>Πλευρική μεταφορά κατακόρυφων φορτίων</u>

Από (1.94 a) και (1.94 b) προκύπτει η πλευρική μεταφορά των κατακόρυφων φορτίων

$\Delta Z_1 = \frac{k_{\varphi 1}^p}{t_1} * \varphi_1^p$	(1.119 a)
$\Delta Z_2 = \frac{k_{\varphi 2}^p}{t_2} * \varphi_2^p$	(1.119 b)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΧΕΙΡΙΣΜΟΙ ΣΕ ΣΥΜΒΑΤΙΚΑ ΟΧΗΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

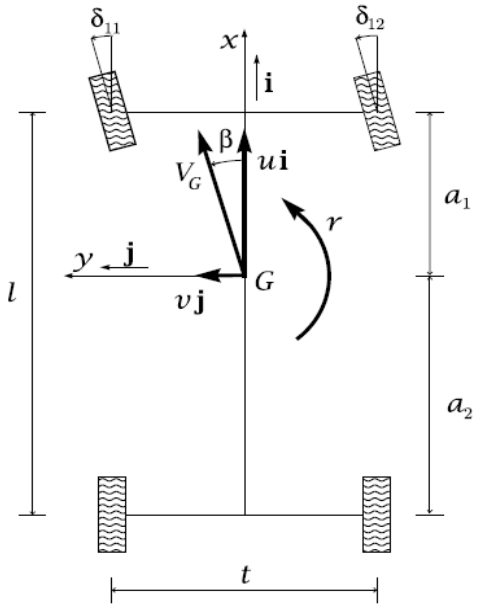
Τα συμβατικά οχήματα (road cars) είναι μακράν το πιο κοινό είδος μηχανοκίνητου οχήματος. Σχεδόν όλα από αυτά μοιράζονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά σχετικά με το χειρισμό:
(1) τέσσερις τροχοί (δύο άξονες)
(2) Κίνηση με δύο τροχούς
(3) ανοικτό διαφορικό
(4) χωρίς πτέρυγες (και επομένως δεν υπάρχουν σημαντικές κάθετες αεροδυνάμεις)
(5) Καμία παρέμβαση από ηλεκτρονικά συστήματα ενεργητικής ασφάλειας όπως ***ABS*** ή ***ESP*** κάτω από συνήθεις συνθήκες λειτουργίας.

Η ανάλυση των χειρισμών αυτού του είδους των οχημάτων είναι κατά κάποιον τρόπο η απλούστερη που μπορεί να προβλέπεται. Επιπλέον, θεωρείται συνήθως ότι το όχημα κινείται σε επίπεδο δρόμο με σχεδόν σταθερή ταχύτητα προς τα εμπρός ***u*** όπου απαιτούνται μικρές κατακόρυφες δυνάμεις από τα ελαστικά. Η ανάλυση εδώ βασίζεται στο γενικό μοντέλο οχήματος που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1. Λόγω των παραπάνω χαρακτηριστικών (1,2,3,4 και 5) είναι δυνατή η μελέτη χειρισμού των οδικών οχημάτων να πραγματοποιηθεί με την βοήθεια του μοντέλου οχήματος ενός ίχνους.

2.1 ΑΡΙΣΤΕΡΗ ΣΤΡΟΦΗ – ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ – ΣΤΑΘΕΡΗ ΓΩΝΙΑ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ ΟΧΗΜΑΤΟΣ

2.1.1 Βασικές Παραδοχές

Θεωρούμε ότι το όχημα στρίβει έχοντας σταθερή γωνία ολίσθησης (οχήματος) ***β***, βλ. **Σχήμα 2.1**.



Σχήμα 2.1.1 Όχημα το οποίο στρίβει με θετική γωνία ολίσθησης και θετικές γωνίες διεύθυνσης στους εμπρόσθιους τροχούς

Μόνιμη κατάσταση (παραδοχές κίνησης)

α) Η διαμήκης συνιστώσα της ταχύτητας είναι σταθερή ***(du/dt=0)***
β) Η πλευρική συνιστώσα της ταχύτητας είναι σταθερή ***(dv/dt=0)***
γ) Σταθερή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής (εκτροπής – Yaw rate) οχήματος, ως προς τον κατακόρυφο άξονα ***(dr/dt=0)***

όπου

$\hat{\beta} = \arctan(\beta) = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$	(2.1.0)
$u = V_G * \cos\beta$	(2.1.1)
$v = V_G * \sin\beta$	(2.1.2)
$r = \frac{V_G}{R_G}$	(2.1.3)

2.1.2 Κινηματική στην μόνιμη κατάσταση

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας εκτροπής (yawing) είναι

$\Omega = r * k$	(2.1.4)

Το κέντρο ταχύτητας (στιγμιαίο κέντρο περιστροφής) του οχήματος έχει συντεταγμένες

$GC = R * i + S * j$	(2.1.5)

όπου

$R = \frac{u}{r} = \frac{V_G * \cos\beta}{\frac{V_G}{R_G}} \rightarrow R = R_G * \cos\beta$	(2.1.6)
$S = -\frac{v}{r} = -\frac{V_G * \sin\beta}{\frac{V_G}{R_G}} \rightarrow S = -R_G * \sin\beta$	(2.1.7)

Η επιτάχυνση του στιγμιαίου κέντρου περιστροφής είναι

$\alpha_C = \left(\alpha_x - r^2 * S - \dot{r} * R\right) * i + \left(\alpha_y - r^2 * R + \dot{r} * S\right) * j = \left(-v * r - r^2 * S\right) * i + \left(u * r - r^2 * R\right) * j$ $= \left(r^2 * S - r^2 * S\right) * i + \left(r^2 * R - r^2 * R\right) * j = 0 * i + 0 * j = 0$	(2.1.8)

Άρα, αφού το (στιγμιαίο) κέντρο περιστροφής, έχει ταχύτητα και επιτάχυνση μηδέν, αναγκαστικά είναι ακίνητο ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων.

Η γωνιακή επιτάχυνση εκτροπής είναι προφανώς μηδέν:

$\dot{\Omega} = \dot{r} * k = 0 * k = 0$	(2.1.9)

Η επόμενη σχέση δείχνει ότι το όχημα κινείται αναγκαστικά σε κυκλική τροχιά

$a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{V_G^2}{R_G} * \sin\beta\right)^2 + \left(\frac{V_G^2}{R_G} * \cos\beta\right)^2} \rightarrow a_G = \frac{V_G^2}{R_G}$	(2.1.10)

όπου $(V_G)^2 / R_G$ η κεντρομόλος επιτάχυνση

Ανακαλώντας γνώσεις κλασσικής Φυσικής – Κινηματικής, η (2.1.8) εκφράζει τη σταθερή κεντρομόλο επιτάχυνση, ως προς το κέντρο περιστροφής ***C***. Ως εκ τούτου, το όχημα (δηλ., το κέντρο βάρους του ***G***) εκτελεί κυκλική τροχιά με κέντρο το ***C***.

<u>Συνιστώσες επιτάχυνσης</u>

$a_y = \dot{v} + u * r = 0 + V_G * \cos\beta * \frac{V_G}{R_G} \rightarrow a_y = \frac{V_G^2}{R_G} * \cos\beta$	Επιτάχυνση στον άξονα ***y*** (2.1.11)
$a_x = \dot{u} - v * r = 0 - V_G * \sin\beta * \frac{V_G}{R_G} \rightarrow a_x = -\frac{V_G^2}{R_G} * \sin\beta$	Επιτάχυνση στον άξονα ***x*** (2.1.12)
$a_t = \frac{\dot{u} * u + \dot{v} * v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{0 * V_G * \cos\beta + 0 * V_G * \sin\beta}{\sqrt{(V_G * \cos\beta)^2 + (V_G * \sin\beta)^2}} \rightarrow a_t = 0$	Εφαπτομενική Επιτάχυνση (2.1.13)
$a_n = \frac{r * (u^2 + v^2) + \dot{v} * u - \dot{u} * v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{\frac{V_G}{R_G} * \left((V_G * \cos\beta)^2 + (V_G * \sin\beta)^2\right) + 0 * V_G * \cos\beta - 0 * V_G * \sin\beta}{\sqrt{(V_G * \cos\beta)^2 + (V_G * \sin\beta)^2}} \rightarrow a_n = \frac{V_G^2}{R_G}$	κάθετη Επιτάχυνση (2.1.14)

Οι (2.1.13) και (2.1.14) δείχνουν πιο καθαρά ότι η τροχιά είναι κυκλική με σταθερή ταχύτητα.

<u>Γωνία ολίσθησης ανα τροχό</u>

Αρχικά προσδιοριζουμε τις ταχύτητες ανα τροχό με δεδομένα τα ***u***,***v***,***r*** που έχουν σταθερή τιμή

$u_{11} = u_{21} = u - \frac{r * t_1}{2}$	(2.1.15)
$u_{12} = u_{22} = u + \frac{r * t_1}{2}$	(2.1.16)
$v_{11} = v_{21} = v + r * \alpha_1$	(2.1.17)
$v_{12} = v_{22} = v - r * \alpha_1$	(2.1.18)
$V_{11} = \sqrt{u_{11}^2 + v_{11}^2}$	(2.1.19)
$V_{12} = \sqrt{u_{12}^2 + v_{12}^2}$	(2.1.20)
$V_{21} = \sqrt{u_{21}^2 + v_{21}^2}$	(2.1.21)
$V_{22} = \sqrt{u_{22}^2 + v_{22}^2}$	(2.1.22)

Στην συνέχεια τις γωνίες ολίσθησης ανά τροχό

$\beta_{11} = \arctan \frac{v_{11}}{u_{11}}$	(2.1.23)
$\beta_{12} = \arctan \frac{v_{12}}{u_{12}}$	(2.1.24)
$\beta_{21} = \arctan \frac{v_{21}}{u_{21}}$	(2.1.25)
$\beta_{22} = \arctan \frac{v_{22}}{u_{22}}$	(2.1.26)

2.1.3 Δυναμική και αναρτήσεις στην μόνιμη κατάσταση

Συνολικές Δυνάμεις

$X = m * \alpha_x = m * \left(-\frac{V_G^2}{R_G} * \sin\beta \right) \rightarrow X = -\frac{m * V_G^2}{R_G} * \sin\beta$	(2.1.27) διαμήκης άξονας ***x*** του οχήματος
$Y = m * \alpha_y = m * \left(\frac{V_G^2}{R_G} * \cos\beta \right) \rightarrow Y = \frac{m * V_G^2}{R_G} * \cos\beta$	(2.1.28) πλευρικός άξονας ***y*** του οχήματος
$Z = 0$	(2.1.29) κατακόρυφος άξονας ***z*** έχουμε ισορροπία (το όχημα ακουμπά στο έδαφος)
$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$	(2.1.30)

Συνολικές Ροπές

$L = -J_{xx} * \dot{r} = -J_{xx} * 0 = 0$	(2.1.31) διαμήκης άξονας ***x*** του οχήματος
$M = -J_{xx} * r^2 = -J_{xx} * \left(\frac{V_G}{R_G} \right)^2 \rightarrow M = -\frac{J_{xx} * V_G^2}{R_G^2}$	(2.1.32) Συνθήκη μηδενικού Pitching (ροπές ως προς τον πλευρικό άξονα ***y***)
$N = J_z * \dot{r} = J_z * 0 \rightarrow N = 0$	(2.1.33) Κίνηση εκτροπής (Yawing) (Περιστροφή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα ***z***)
$M_G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$	(2.1.34)

Βάρος Οχήματος

Η συνισταμένη του βάρους δρά στο κέντρο μάζας και γράφεται

$W = -m * g * k$	(2.1.35)

Το βάρος, προφανώς, δεν συνεισφέρει στην ροπή M_G.

Αεροδυναμικές Δυνάμεις (Aerodynamic Forces)

Οι αεροδυναμικές δυνάμεις εξαρτώνται από το σχήμα και το μέγεθος του οχήματος, καθώς και από την σχετική ταχύτητα V_a μεταξύ οχήματος και αέρα

$V_a = V_{air} - V_G = c$	(2.1.36)

Οι συνιστώσες του αεροδυναμικού φορτίου γράφονται στο σύστημα του Οχήματος ως

$X_a = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_x * S_a * V_a^2 \rightarrow X_a = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_x * S_a * c^2$	(2.1.37)
$Y_a = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_y * S_a * V_a^2 \rightarrow Y_a = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_y * S_a * c^2$	(2.1.38)
$Z_a = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_z * S_a * V_a^2 \rightarrow Z_a = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_z * S_a * c^2$	(2.1.39)
$Z_{a1} = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_{z1} * S_a * V_a^2 \rightarrow Z_{a1} = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_{z1} * S_a * c^2$	(2.1.40)
$Z_{a2} = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_{z2} * S_a * V_a^2 \rightarrow Z_{a2} = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_{z2} * S_a * c^2$	(2.1.41)
$F_a = \sqrt{X_a^2 + Y_a^2 + Z_a^2} \rightarrow F_a = \frac{1}{2} * \rho_{air} * \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} * S_a * c^2$	(2.1.42)

Στη γενική περίπτωση, τα αεροδυναμικά φορτία συνεισφέρουν στην τιμή της ροπής M_G. Αυτό σημαίνει ότι η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης F_a δεν περνά από το κέντρο Μάζας. Έτσι έχουμε

$M_a = M_{ax} * i + M_{ay} * j + M_{az} * k$	(2.1.43)

Οι ροπές M_{ax} και M_{az} είναι αμελητέες σε σχέση με την M_{ay} οπότε λαμβάνουμε υπόψη μόνο την τελευταία

$M_{ay} = Z_a * a_2 - Z_{a1} * (\alpha_1 + \alpha_2) + X_a * h \rightarrow M_{ay} = \frac{1}{2} * \rho_{air} * \left(C_z * \alpha_2 - C_{z1} * (\alpha_1 + \alpha_2) + C_x * h\right) * S_a * c^2$	(2.1.44)

Συνιστώσες Ροπής εκτροπής

$N_X = \Delta X_1 * t_1 + \Delta X_2 * t_2 = 0$	(2.1.45)
$N = N_X + N_Y \rightarrow 0 = 0 + N_Y \rightarrow N_Y = 0$	(2.1.46)
$x_N = \frac{N_Y}{Y} = \frac{0}{\frac{m * V_G^2}{R_G} * \cos\beta} \rightarrow x_N = 0$	(2.1.47)

Συνιστώσες Πλευρικής Δύναμης

$Y_1 = \frac{N_Y + m * \alpha_2 * \alpha_y}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0 + m * \alpha_2 * \frac{V_G^2}{R_G} * \cos\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \rightarrow Y_1 = \frac{m * \alpha_2 * V_G^2}{R_G * (\alpha_1 + \alpha_2)} * \cos\beta$	(2.1.48)

$Y_2 = \frac{m*\alpha_1*\alpha_y - N_Y}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{m*\alpha_1*\frac{V_G^2}{R_G}*\cos\beta - 0}{\alpha_1+\alpha_2} \rightarrow Y_2 = \frac{m*\alpha_1*V_G^2}{R_G*(\alpha_1+\alpha_2)}*\cos\beta$	(2.1.49)

<u>Ακαμψίες λόγω Πλευρικής Δύναμης</u>

Αρχικά προσδιορίζουμε τις γωνίες a_1 και a_2 που είναι συνάρτηση των u,v και r

$a_1 = \tau_1*\delta_v - \frac{v+r*\alpha_1}{u}$	(2.1.50)
$a_2 = \chi*\tau_1*\delta_v - \frac{v-r*\alpha_2}{u}$	(2.1.51)

Στη συνέχεια τις ακαμψίες C_1 και C_2

$C_1 = \frac{Y_1}{a_1}$	(2.1.52)
$C_2 = \frac{Y_2}{a_2}$	(2.1.53)

<u>Επιμέρους και συνολικά κατακόρυφα φορτία</u>

$Z_1^0 = \frac{m*g*\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$	(2.1.54)
$Z_2^0 = \frac{m*g*\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$	(2.1.55)
$\Delta Z = -\frac{m*h}{\alpha_1+\alpha_2}*\alpha_x + \frac{J_{xx}}{\alpha_1+\alpha_2}*r^2 = -\frac{m*h}{\alpha_1+\alpha_2}*\left(-\frac{V_G^2}{R_G}*\sin\beta\right) + \frac{J_{xx}}{\alpha_1+\alpha_2}*\left(\frac{V_G}{R_G}\right)^2 \rightarrow \Delta Z = \frac{m*h*V_G^2}{R_G*(\alpha_1+\alpha_2)}*\sin\beta + \frac{J_{xx}*V_G^2}{R_G^2*(\alpha_1+\alpha_2)}$	(2.1.56)
$Z_1 = \frac{m*g*\alpha_2 - M - X*h}{\alpha_1+\alpha_2} - Z_{a1} = \frac{m*g*\alpha_2 - \left(-\frac{J_{xx}*V_G^2}{R_G^2}\right) - \left(-\frac{m*V_G^2}{R_G}*\sin\beta\right)*h}{\alpha_1+\alpha_2} - \frac{1}{2}*\rho_{air}*C_{z1}*S_a*c^2$ $\rightarrow Z_1 = \frac{m*g*\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} + \frac{J_{xx}*V_G^2}{R_G^2*(\alpha_1+\alpha_2)} - \frac{1}{2}*\rho_{air}*C_{z1}*S_a*c^2 + \frac{m*V_G^2*h}{R_G*(\alpha_1+\alpha_2)}*\sin\beta$	(2.1.57)
$Z_2 = \frac{m*g*\alpha_1 + M + X*h}{\alpha_1+\alpha_2} - Z_{a2} = \frac{m*g*\alpha_1 + \left(-\frac{J_{xx}*V_G^2}{R_G^2}\right) + \left(-\frac{m*V_G^2}{R_G}*\sin\beta\right)*h}{\alpha_1+\alpha_2} - \frac{1}{2}*\rho_{air}*C_{z2}*S_a*c^2$ $\rightarrow Z_2 = \frac{m*g*\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} - \frac{J_{xx}*V_G^2}{R_G^2*(\alpha_1+\alpha_2)} - \frac{1}{2}*\rho_{air}*C_{z2}*S_a*c^2 - \frac{m*V_G^2*h}{R_G*(\alpha_1+\alpha_2)}*\sin\beta$	(2.1.58)

Αναρτήσεις και μεταφορές κατακόρυφων φορτίων ΔZ_1-ΔZ_2

Αρχικά προσδιορίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη

$q_b = \frac{\alpha_2 * q_1 + \alpha_1 * q_2}{l} + x_N * \frac{q_2 - q_1}{l} \xrightarrow{x_N=0} q_b = \frac{\alpha_2 * q_1 + \alpha_1 * q_2}{l}$	(2.1.59)
$L_b = Y * (h - q_b)$	(2.1.60)

Στην συνέχεια λύνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$\varphi = \varphi_1^s + \varphi_1^p = \varphi_2^s + \varphi_2^p$ $\Delta Z_1 * t_1 = k_{\varphi 1}^p * \varphi_1^p = Y_1 * q_1 + k_{\varphi 1}^s * \varphi_1^s$ $\Delta Z_2 * t_2 = k_{\varphi 2}^p * \varphi_2^p = Y_2 * q_2 + k_{\varphi 2}^s * \varphi_2^s$ $k_{\varphi 1}^s * \varphi_1^s + k_{\varphi 2}^s * \varphi_2^s = L_b$	

Οπότε προκύπτουν οι γωνίες

$\varphi_1^s = \frac{-L_b * (1 + k_4) - k_{\varphi 2}^s * (k_2 * Y_2 - k_1 * Y_1)}{-k_{\varphi 1}^s * (1 + k_4) - k_{\varphi 2}^s * (1 + k_3)}$ $\varphi_2^s = \frac{k_{\varphi 1}^s * (k_2 * Y_2 - k_1 * Y_1) - L_b * (1 + k_3)}{-k_{\varphi 1}^s * (1 + k_4) - k_{\varphi 2}^s * (1 + k_3)}$ $\varphi_1^p = k_1 * Y_1 + k_3 * \varphi_1^s$ $\varphi_2^p = k_2 * Y_2 + k_4 * \varphi_2^s$	(2.1.61),(2.1.62),(2.1.63) και (2.1.64)
$\frac{q_1}{k_{\varphi 1}^p} = k_1, \frac{q_2}{k_{\varphi 2}^p} = k_2, \frac{k_{\varphi 1}^s}{k_{\varphi 1}^p} = k_3, \frac{k_{\varphi 2}^s}{k_{\varphi 2}^p} = k_4$	

Τελικά προσδιορίζουμε τα ***ΔZ_1*** και ***ΔZ_2***

$\Delta Z_1 = \frac{k_{\varphi 1}^p}{t_1} * \varphi_1^p$ $\Delta Z_2 = \frac{k_{\varphi 2}^p}{t_2} * \varphi_2^p$	(2.1.65) και (2.1.66)

Κατακόρυφα φορτία ανά τροχό

$Z_{11} = \frac{Z_1}{2} - \Delta Z_1$ $Z_{12} = \frac{Z_1}{2} + \Delta Z_1$ $Z_{21} = \frac{Z_2}{2} - \Delta Z_2$ $Z_{22} = \frac{Z_2}{2} + \Delta Z_2$ $R_0 = Z_{12} + Z_{22}$ $R_I = Z_{11} + Z_{21}$	(2.1.67),(2.1.68),(2.1.69),(2.1.70),(2.1.71) και (2.1.72)

Μεταβολές της γωνίας Κάμπερ

Αρχικά προσδιορίζουμε τα πλευρικά φορτία ανά τροχό

$Y_{11} = Y_1 * \frac{Z_{11}}{Z_{11} + Z_{12}}$ $Y_{12} = Y_1 * \frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_{12}}$ $Y_{21} = Y_2 * \frac{Z_{21}}{Z_{21} + Z_{22}}$ $Y_{22} = Y_2 * \frac{Z_{22}}{Z_{21} + Z_{22}}$ $\Delta Y_1 = \frac{Y_{12} - Y_{11}}{2}$ $\Delta Y_2 = \frac{Y_{22} - Y_{21}}{2}$	

Στην συνέχεια προσδιορίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη

$b_1 = \frac{2 * c_1 * q_1}{\tau_1}$ $b_2 = \frac{2 * c_2 * q_2}{\tau_2}$ $\Delta\tau_1 = -\frac{4 * b_1}{k_{\alpha 1}^s * c_1} * \Delta Y_1$ $\Delta\tau_2 = -\frac{4 * b_2}{k_{\alpha 2}^s * c_2} * \Delta Y_2$	(2.1.73),(2.1.74),(2.1.75) και (2.1.76)

Τελικά προσδιορίζουμε προσεγγιστικά τα ***Δγ*** ανά τροχό

$\Delta\gamma_{11} = -\frac{q_1 - b_1}{b_1} * \varphi_1^s + \varphi_1^p + \frac{1}{2*b_1} * \Delta\tau_1$ $\Delta\gamma_{12} = -\frac{q_1 - b_1}{b_1} * \varphi_1^s + \varphi_1^p - \frac{1}{2*b_1} * \Delta\tau_1$ $\Delta\gamma_{21} = -\frac{q_2 - b_2}{b_2} * \varphi_2^s + \varphi_2^p + \frac{1}{2*b_2} * \Delta\tau_2$ $\Delta\gamma_{22} = -\frac{q_2 - b_2}{b_2} * \varphi_2^s + \varphi_2^p - \frac{1}{2*b_2} * \Delta\tau_2$	(2.1.77),(2.1.78),(2.1.79) και (2.1.80)

<u>Κατακόρυφες μετατοπίσεις και φορτία λογω αναρτήσεων</u>

Αρχικά προσδιορίζουμε τις κατακόρυφες μετατοπίσεις

$z_1^s = -\frac{c_1}{2*b_1} * \Delta\tau_1$ $z_2^s = -\frac{c_2}{2*b_2} * \Delta\tau_2$ $z_1^p = \frac{k_{z1}^s}{k_{z1}^p} * z_1^s$ $z_2^p = \frac{k_{z2}^s}{k_{z2}^p} * z_2^s$ $z_1 = \frac{k_{z1}^s}{k_{z1}} * z_1^s$ $z_2 = \frac{k_{z2}^s}{k_{z2}} * z_2^s$	(2.1.81),(2.1.82),(2.1.83),(2.1.84),(2.1.85) και (2.1.86)

Τελικά προσδιορίζουμε τα κατακόρυφα φορτία λόγω των κατακόρυφων μετατοπίσεων

$Z_1^b = k_{z1} * z_1$ $Z_2^b = k_{z2} * z_2$	(2.1.87) και (2.1.88)

Γωνίες διεύθυνσης και δυνάμεις στον άξονα x ανά τροχό

Ισχύει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$X_1 = X_{11} + X_{12}$ $X_2 = X_{21} + X_{22}$ $\Delta X_1 = X_{12} - X_{11}$ $\Delta X_2 = X_{22} - X_{21}$ $X_{11} = Y_{11} * \tan(\delta_{11})$ $X_{12} = Y_{12} * \tan(\delta_{12})$ $X_{21} = Y_{21} * \tan(\delta_{21})$ $X_{22} = Y_{22} * \tan(\delta_{22})$ $X_1 + X_2 = X_a + m * \alpha_x$ $\Delta X_1 * t_1 + \Delta X_2 * t_2 = 0$	

Λαμβάνουμε υπόψη ότι $\delta_1=\delta_{11}=\delta_{12}$ και $\delta_2=\delta_{21}=\delta_{22}$

Αρχικά προσδιορίζουμε τις γωνίες διεύθυνσης ανά τροχό

$\tan(\delta_1) = \dfrac{(X_a + m * \alpha_x) * (Y_{22} - Y_{21}) * t_2}{(Y_{11} + Y_{12}) * (Y_{22} - Y_{21}) * t_2 - (Y_{21} + Y_{22}) * (Y_{12} - Y_{11}) * t_1}$ $\tan(\delta_2) = \dfrac{-(X_a + m * \alpha_x) * (Y_{12} - Y_{11}) * t_1}{(Y_{11} + Y_{12}) * (Y_{22} - Y_{21}) * t_2 - (Y_{21} + Y_{22}) * (Y_{12} - Y_{11}) * t_1}$ $\delta_{11} = \delta_{12} = \delta_1 = \arctan(\delta_1)$ $\delta_{21} = \delta_{22} = \delta_2 = \arctan(\delta_2)$	(2.1.89),(2.1.90),(2.1.91) και (2.1.92)

Τελικά προσδιορίζουμε τις δυνάμεις και τις μεταφορές δυνάμεων στον άξονα ***x*** ανά τροχό

$X_{11} = Y_{11} * \tan(\delta_{11})$ $X_{12} = Y_{12} * \tan(\delta_{12})$ $X_{21} = Y_{21} * \tan(\delta_{21})$ $X_{22} = Y_{22} * \tan(\delta_{22})$ $X_1 = X_{11} + X_{12}$ $X_2 = X_{21} + X_{22}$ $\Delta X_1 = X_{12} - X_{11}$ $\Delta X_2 = X_{22} - X_{21}$	(2.1.93),(2.1.94), (2.1.95),(2.1.96), (2.1.97),(2.1.98),(2.1.99) και (2.1.100)

Τελικές γωνίες διεύθυνσης ανά τροχό

$a_{11} = \delta_{11} - \beta_{11}$ $a_{12} = \delta_{12} - \beta_{12}$ $a_{21} = \delta_{21} - \beta_{21}$ $a_{22} = \delta_{22} - \beta_{22}$	(2.1.101),(2.1.102),(2.1.103) και (2.1.104)

Θεωρητικές ολισθήσεις στον άξονα y ανα τροχό

Λόγω χρήσης ανοικτού διαφορικου ισχύει $\sigma_{x11} = \sigma_{x12} = \sigma_{x21} = \sigma_{x22} \approx 0$

Αρχικά προσδιορίζουμε τις γραμμικές ταχύτητες ανά τροχό

$\omega_{11} * r_1 = u_{11} * \cos(\delta_{11}) + v_{11} * \sin(\delta_{11})$ $\omega_{12} * r_1 = u_{12} * \cos(\delta_{12}) + v_{12} * \sin(\delta_{12})$ $\omega_{21} * r_2 = u_{21} * \cos(\delta_{21}) + v_{21} * \sin(\delta_{21})$ $\omega_{22} * r_2 = u_{22} * \cos(\delta_{22}) + v_{21} * \sin(\delta_{22})$	(2.1.105),(2.1.106),(2.1.107) και (2.1.108)

Τελικά προσδιορίζουμε τις θεωρητικές ολισθήσεις στον άξονα ***y*** ανά τροχό

$\sigma_{y11} = \dfrac{v_{11} * \cos(\delta_{11}) - u_{11} * \sin(\delta_{11})}{\omega_{11} * r_1}$ $\sigma_{y12} = \dfrac{v_{12} * \cos(\delta_{12}) - u_{12} * \sin(\delta_{12})}{\omega_{12} * r_1}$ $\sigma_{y21} = \dfrac{v_{21} * \cos(\delta_{21}) - u_{21} * \sin(\delta_{21})}{\omega_{21} * r_2}$ $\sigma_{y22} = \dfrac{v_{22} * \cos(\delta_{22}) - u_{22} * \sin(\delta_{22})}{\omega_{22} * r_2}$	(2.1.109),(2.1.110),(2.1.111) και (2.1.112)

Συντελεστές πρόσφυσης ελαστικού – οδοστρώματος στην εγκάρσια διεύθυνση ανά τροχό

$\mu_1 = \dfrac{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}{Z_1} = \mu_{11} = \mu_{12}$ $\mu_2 = \dfrac{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}{Z_2} = \mu_{21} = \mu_{22}$	(2.1.113) και (2.1.114)

2.1.4 Εξίσωση τροχιάς

Αρχικά προσδιορίζουμε την γωνία εκτροπής συναρτήσει του χρόνου

$\dot{\psi} = r \rightarrow \dot{\psi} = \dfrac{V_G}{R_G} \rightarrow \psi = \dfrac{V_G}{R_G} * t + \psi_0$	(2.1.113)

Με ολοκλήρωση υπολογίζουμε τις θέσεις x_0 και y_0 συναρτήσει του χρόνου

$x_0 = R_G * \cos\beta * \sin\left(\frac{V_G}{R_G} * t + \psi_0\right) + R_G * \sin\beta * \cos\left(\frac{V_G}{R_G} * t + \psi_0\right)$	(2.1.114)
$y_0 = -R_G * \cos\beta * \cos\left(\frac{V_G}{R_G} * t + \psi_0\right) + R_G * \sin\beta * \sin\left(\frac{V_G}{R_G} * t + \psi_0\right)$	(2.1.115)

Λύνωντας το συστημα των εξισώσεων (2.1.114) και (2.1.115) προκύπτει

$\sin\left(\frac{V_G}{R_G} * t + \psi_0\right) = \frac{\cos\beta * x_0 + \sin\beta * y_0}{R_G}$ $\cos\left(\frac{V_G}{R_G} * t + \psi_0\right) = \frac{\sin\beta * x_0 - \cos\beta * y_0}{R_G}$	

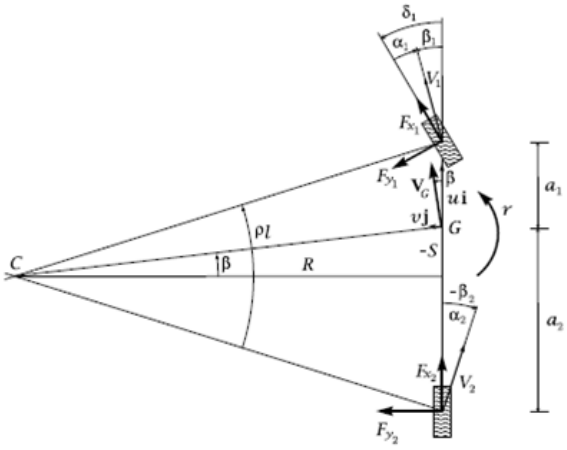
Με την βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας κάνουμε απαλοιφή χρόνου και έτσι προκύπτει η αναμενόμενη κυκλική τροχιά.

$\sin^2\left(\frac{V_G}{R_G} * t + \psi_0\right) + \cos^2\left(\frac{V_G}{R_G} * t + \psi_0\right) = 1 \rightarrow \left(\frac{\cos\beta * x_0 + \sin\beta * y_0}{R_G}\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta * x_0 - \cos\beta * y_0}{R_G}\right)^2 = 1$ $\rightarrow (\cos\beta * x_0 + \sin\beta * y_0)^2 + (\sin\beta * x_0 - \cos\beta * y_0)^2 = R_G^2$ $\rightarrow \cos^2\beta * x_0^2 + \sin^2\beta * y_0^2 + 2 * \cos\beta * x_0 * \sin\beta * y_0 + \sin^2\beta * x_0^2 + \cos^2\beta * y_0^2 - 2 * \sin\beta * x_0 * \cos\beta * y_0 = R_G^2$ $\rightarrow (\cos^2\beta + \sin^2\beta) * x_0^2 + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) * y_0^2 = R_G^2 \rightarrow x_0^2 + y_0^2 = R_G^2$	(2.1.116)

2.2 Γραμμικό Μοντέλο Οχήματος ενός ίχνους

2.2.1 Εισαγωγή

Τα απλούστερα δυναμικά συστήματα είναι εκείνα που διέπονται από γραμμικές απλές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.



Σχήμα 2.2.1 Μοντέλο Οχήματος ενός ίχνους

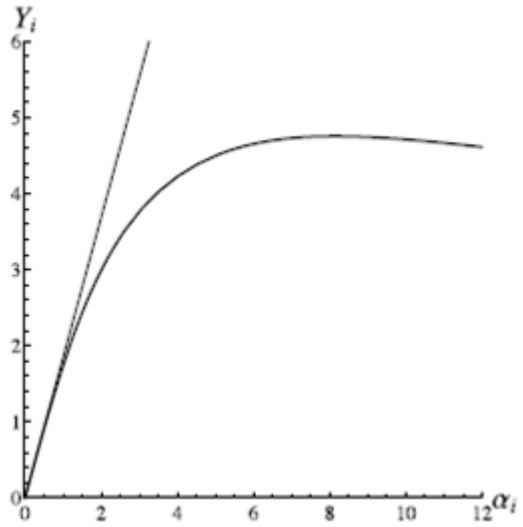
Το μοντέλο οχήματος ενός ίχνους της **Σχήμα 2.2.1** διέπεται από μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις εκτός και αν τα χαρακτηριστικα του άξονα αντικατασταθούν από τις ακόλουθες γραμμικές συναρτήσεις

$$Y_1=C_1*a_1 \text{ και } Y_2=C_2*a_2$$

Όπου

$$C_1= (Y_1/ a_1)'_{(a1=0)} \text{ και } C_2= (Y_2/ a_2)'_{(a2=0)}$$

Η πλευρική δυσκαμψία του οχήματος C_i είναι συνήθως ίση με το διπλάσιο της δυσκαμψίας πλευρικής ολίσθησης του ελαστικού. Επηρεάζεται από το στατικό κατακόρυφο φορτίο και όχι από την μεταφορά φορτίου. Η επιρροή από την κύλιση είναι πολύ ιδιόμορφη. Όμως όπως φαίνεται από το **Σχήμα 2.2.2** η γραμμική προσέγγιση είναι αποδεκτή μόνο αν $|a_i| < 2^o$ για πολύ χαμηλές τιμές της α_y. Το κύριο πλεονέκτημα του μοντέλου οχήματος ενός ίχνους είναι η απλότητα, το κύριο μειονέκτημα ότι δεν μοντελοποιεί την συμπεριφορά του οχήματος εξ ολοκλήρου, εκτός αν η πλευρική επιτάχυνση είναι πραγματικά μικρή (τυπικά $\alpha_y < 0,2*g$ σε ξηρή άσφαλτο). Υπό κάποια έννοια, είναι ένα "επικίνδυνο" μοντέλο διότι μπορεί να μπείς στον πειρασμό να το χρησιμοποιήσεις εκτός του εύρους της εγκυρότητας του. Παρολαυτα, σε μερικές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να έχεις ένα μοντέλο όπου όλα μπορούν να βρεθούν αναλυτικά.



Σχήμα 2.2.2 Γραμμική προσέγγιση των αξονικών χαρακτηριστικών

2.2.2 Βασικές Παραδοχές και εξισώσεις

Για το γραμμικό μοντέλο οχήματος ενός ίχνους ακολουθούν

οι εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων (2.2.3),(2.2.4) και (2.2.5)
οι εξισώσεις ισορροπίας ροπών (2.2.6),(2.2.7),(2.2.8),(2.2.9),(2.2.10),(2.2.11) και (2.2.12)
οι εξισώσεις επιταχύνσεων (2.2.1) και (2.2.2)

$a_x = \dot{u} - v*r = \dot{u} - u^2*\beta*\rho$	(1.23) ή (2.2.1)

$a_y = \dot{v} + u*r = u*\dot{\beta} + \dot{u}*\beta + u^2*\rho$	(1.24) ή (2.2.2)

$m*\alpha_x = X \Rightarrow m*(\dot{u} - v*r) = X_1 + X_2 - X_a$	(1.63 a) ή (2.2.3)
$m*\alpha_y = Y \Rightarrow m*(\dot{v} + u*r) = Y_1 + Y_2$	(1.63 b) ή (2.2.4)
$m*\alpha_z = 0 = Z \Rightarrow Z_1 + Z_2 - m*g + Z_{a1} + Z_{a2} = 0$	(1.63 c) ή (2.2.5)

$-J_{zx}*\dot{r} = L \Rightarrow -J_{zx}*\dot{r} = -\Delta Z_1*t_1 - \Delta Z_2*t_2 + (Y_1 + Y_2)*h$	(1.63 d) ή (2.2.6)
$-J_{zx}*r^2 = M \Rightarrow -J_{zx}*r^2 = -Z_1*\alpha_1 + Z_2*\alpha_2 - (X_1 + X_2 - X_a)*h - Z_{a1}*\alpha_1 + Z_{a2}*\alpha_2$	(1.63 e) ή (2.2.7)
$J_z*\dot{r} = N \Rightarrow J_z*\dot{r} = Y_1*\alpha_1 - Y_2*\alpha_2 + \Delta X_1*t_1 + \Delta X_2*t_2$	(1.63 f) ή (2.2.8)

$N_Y = Y_1*\alpha_1 - Y_2*\alpha_2$	(1.65 a) ή (2.2.9)
$N_X = \Delta X_1*t_1 + \Delta X_2*t_2$	(1.65 b) ή (2.2.10)

$J_z*\dot{r} = N_X + N_Y = N$	(1.66) ή (2.2.11)

$x_N = \frac{N_Y}{Y}$	(1.68) ή (2.2.12)

Οι εξισώσεις αναλογίας (2.2.13) και (2.2.14) (όπου ***|χ|<<1*** και συχνά ***χ=0***)

$a_1 = \tau_1*\delta_v - \frac{v + r*\alpha_1}{u}$	(2.1.50) ή (2.2.13)
$a_2 = \chi*\tau_1*\delta_v - \frac{v - r*\alpha_2}{u}$	(2.1.51) ή (2.2.14)

Και οι γραμμικές εξισώσεις (2.2.15) και (2.2.16)

$C_1 = \frac{Y_1}{a_1}$	(2.1.52) ή (2.2.15)
$C_2 = \frac{Y_2}{a_2}$	(2.1.53) ή (2.2.16)

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις αναλογίας με τις γραμμικές προκύπτει

$Y_1 = c_{y1} - c_{y2}*\frac{v}{u} - c_{y3}*\frac{r}{u}$ $Y_2 = c_{y4} - c_{y5}*\frac{v}{u} - c_{y6}*\frac{r}{u}$	(2.2.17) και (2.2.18)

Προς διευκόλυνση των πράξεων που απαιτούνται ορίζουμε τις σταθερές

$c_{y1} = C_1 * \tau_1 * \delta_v$ $c_{y2} = C_1$ $c_{y3} = C_1 * \alpha_1$ $c_{y4} = C_2 * \tau_1 * \delta_v * \chi \xrightarrow{\chi=1 \to \chi=0} c_{y4} = 0$ $c_{y5} = C_2$ $c_{y6} = -C_2 * \alpha_2$	

Για τα συνηθισμένα οδικά οχήματα που χρησιμοποιούν ανοικτό διαφορικό θεωρούμε ότι η ταχύτητα προς τα εμπρός ***u*** έχει σταθερή τιμή και η ροπή εκτροπής στον διαμήκη άξονα ***N_x*** είναι περίπου ίση με 0

$N_x = \Delta X_1 * t_1 + \Delta X_2 * t_2 = 0$	(2.1.45) ή (2.2.19)

$u = c$	(2.2.20)

2.2.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Από τις εξισώσεις (2.2.4),(2.2.8) και (2.2.19) προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = m * a_y \\ Y_1 * \alpha_1 - Y_2 * \alpha_2 = J_z * \dot{r} \end{cases}$	

Αντικαθιστούμε τις πλευρικές δυνάμεις ***Y₁*** και ***Y₂*** από τις εξισώσεις (2.2.17) και (2.2.18)

$\begin{cases} c_{y1} - c_{y2} * \frac{v}{u} - c_{y3} * \frac{r}{u} + c_{y4} - c_{y5} * \frac{v}{u} - c_{y6} * \frac{r}{u} = m * (\dot{v} + u * r) \\ \left(c_{y1} - c_{y2} * \frac{v}{u} - c_{y3} * \frac{r}{u}\right) * \alpha_1 - \left(c_{y4} - c_{y5} * \frac{v}{u} - c_{y6} * \frac{r}{u}\right) * \alpha_2 = J_z * \dot{r} \end{cases}$	

και εκτελούμε πράξεις

$\to \begin{cases} c_{y1} + c_{y4} - (c_{y2} + c_{y5}) * \frac{v}{u} - (c_{y3} + c_{y6}) * \frac{r}{u} = m * (\dot{v} + u * r) \\ c_{y1} * \alpha_1 - c_{y2} * \alpha_1 * \frac{v}{u} - c_{y3} * \alpha_1 * \frac{r}{u} - c_{y4} * \alpha_2 + c_{y5} * \alpha_2 * \frac{v}{u} + c_{y6} * \alpha_2 * \frac{r}{u} = J_z * \dot{r} \end{cases}$	

$\to \begin{cases} \dot{v} = \frac{c_{y1} + c_{y4}}{m} - \frac{c_{y2} + c_{y5}}{m} * \frac{v}{u} - \frac{c_{y3} + c_{y6}}{m} * \frac{r}{u} - u * r \\ \dot{r} = \frac{c_{y1} * \alpha_1 - c_{y4} * \alpha_2}{J_z} + \frac{c_{y5} * \alpha_2 - c_{y2} * \alpha_1}{J_z} * \frac{v}{u} + \frac{c_{y6} * \alpha_2 - c_{y3} * \alpha_1}{J_z} * \frac{r}{u} \end{cases}$	

$\xrightarrow{u=c} \begin{cases} \dot{v} = \dfrac{c_{y1}+c_{y4}}{m} - \dfrac{c_{y2}+c_{y5}}{m*c}*v - \left(\dfrac{c_{y3}+c_{y6}}{m*c}+c\right)*r \\ \dot{r} = \dfrac{c_{y1}*\alpha_1 - c_{y4}*\alpha_2}{J_z} + \dfrac{c_{y5}*\alpha_2 - c_{y2}*\alpha_1}{J_z*c}*v + \dfrac{c_{y6}*\alpha_2 - c_{y3}*\alpha_1}{J_z*c}*r \end{cases}$	

$\rightarrow \begin{cases} \dot{v} = -\dfrac{c_{y2}+c_{y5}}{m*c}*v - \left(\dfrac{c_{y3}+c_{y6}}{m*c}+c\right)*r + \dfrac{c_{y1}+c_{y4}}{m} \\ \dot{r} = \dfrac{c_{y5}*\alpha_2 - c_{y2}*\alpha_1}{J_z*c}*v + \dfrac{c_{y6}*\alpha_2 - c_{y3}*\alpha_1}{J_z*c}*r + \dfrac{c_{y1}*\alpha_1 - c_{y4}*\alpha_2}{J_z} \end{cases}$	(2.2.21) και (2.2.22)

Προς διευκόλυνση των πράξεων που απαιτούνται ορίζουμε τις σταθερές

$c_{y7} = \dfrac{c_{y2}+c_{y5}}{m*c}$ $c_{y8} = \dfrac{c_{y3}+c_{y6}}{m*c}+c$ $c_{y9} = \dfrac{c_{y1}+c_{y4}}{m}$ $c_{y10} = \dfrac{c_{y5}*\alpha_2 - c_{y2}*\alpha_1}{J_z*c}$ $c_{y11} = \dfrac{c_{y6}*\alpha_2 - c_{y3}*\alpha_1}{J_z*c}$ $c_{y12} = \dfrac{c_{y1}*\alpha_1 - c_{y4}*\alpha_2}{J_z}$	

Με αυτό τον τρόπο προκύπτει ένα απλούστερο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$\begin{cases} \dot{v} = -c_{y7}*v - c_{y8}*r + c_{y9} \\ \dot{r} = c_{y10}*v + c_{y11}*r + c_{y12} \end{cases}$	(2.2.23) και (2.2.24)

2.2.4 Προσδιορισμός συνάρτησης πλευρικής ταχύτητας v

Για να προσδιορίσουμε την συνάρτηση της πλευρικής ταχύτητας ***v*** πρέπει να λύσουμε το σύστημα που αποτελείται από τις εξισώσεις (2.2.23) και (2.2.24). Το σύστημα αυτό θα το λύσουμε με την Μέθοδο της Απαλοιφής (αντικατάστασης)

Βήμα 1ο

$\begin{cases} c_{y8}*r = -\dot{v} - c_{y7}*v + c_{y9} \\ c_{y11}*r = \dot{r} - c_{y10}*v - c_{y12} \end{cases}$	

$\xrightarrow{(\div)} \frac{c_{y8}}{c_{y11}} = \frac{-\dot{v} - c_{y7} * v + c_{y9}}{\dot{r} - c_{y10} * v - c_{y12}}$	

$\rightarrow c_{y8} * \left(\dot{r} - c_{y10} * v - c_{y12}\right) = c_{y11} * \left(-\dot{v} - c_{y7} * v + c_{y9}\right)$	

$\rightarrow c_{y8} * \dot{r} - c_{y8} * c_{y10} * v - c_{y8} * c_{y12} = -c_{y11} * \dot{v} - c_{y11} * c_{y7} * v + c_{y11} * c_{y9}$	

$\rightarrow c_{y8} * \dot{r} = c_{y8} * c_{y10} * v + c_{y8} * c_{y12} - c_{y11} * \dot{v} - c_{y11} * c_{y7} * v + c_{y11} * c_{y9}$	

$\rightarrow \dot{r} = -\frac{c_{y11}}{c_{y8}} * \dot{v} + \frac{c_{y8} * c_{y10} - c_{y11} * c_{y7}}{c_{y8}} * v + \frac{c_{y8} * c_{y12} + c_{y11} * c_{y9}}{c_{y8}}$	(2.2.23x)

<u>Βήμα 2ο</u>

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (2.2.23)

$\dot{v} = -c_{y7} * v - c_{y8} * r + c_{y9} \rightarrow \ddot{v} = -c_{y7} * \dot{v} - c_{y8} * \dot{r}$	(2.2.23xx)

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.2.23xx) την (2.2.23x)

$\rightarrow \ddot{v} = -c_{y7} * \dot{v} - c_{y8} * c_{y10} * v - c_{y8} * c_{y12} + c_{y11} * \dot{v} + c_{y11} * c_{y7} * v - c_{y11} * c_{y9}$	

$\rightarrow \ddot{v} = \left(c_{y11} - c_{y7}\right) * \dot{v} + \left(c_{y11} * c_{y7} - c_{y8} * c_{y10}\right) * v - c_{y11} * c_{y9} - c_{y8} * c_{y12}$	

$\rightarrow \ddot{v} - \left(c_{y11} - c_{y7}\right) * \dot{v} - \left(c_{y11} * c_{y7} - c_{y8} * c_{y10}\right) * v = -c_{y11} * c_{y9} - c_{y8} * c_{y12}$	(2.2.25)

Προς διευκόλυνση των πράξεων που απαιτούνται ορίζουμε τις σταθερές

$c_{y13} = -\left(c_{y11} - c_{y7}\right)$ $c_{y14} = -\left(c_{y11} * c_{y7} - c_{y8} * c_{y10}\right)$ $c_{y15} = -c_{y11} * c_{y9} - c_{y8} * c_{y12}$	

Με αυτό τον τρόπο προκύπτει μια απλούστερη γραμμική διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού με σταθερούς συντελεστές

$\ddot{v} + c_{y13} * \dot{v} + c_{y14} * v = c_{y15}$	(2.2.26)

Λύση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ου βαθμού με σταθερούς συντελεστές (ομογενής)

Αρχικά προσδιορίζουμε την ομογενή λύση

$v = e^{\mu * w}\ (x)$ $\dot{v} = \mu * e^{\mu * w}\ (xx)$ $\ddot{v} = \mu^2 * e^{\mu * w}\ (xxx)$	

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.2.26) τις (x),(xx) και (xxx) και εκτελούμε πράξεις

$\mu^2 * e^{\mu * w} + c_{y13} * \mu * e^{\mu * w} + c_{y14} * e^{\mu * w} = 0$	

$\rightarrow \mu^2 + c_{y13} * \mu + c_{y14} = 0$	

$\rightarrow \mu_{1,2} = \dfrac{-c_{y13} \pm \sqrt{c_{y13}^{\ 2} - 4 * c_{y14}}}{2}$	

Οι λυσεις του τριωνύμου μ_1 και μ_2 ονομάζονται ιδιοτιμές και δίνουν την ομογενή λύση

$v_{hom} = c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * e^{\mu_2 * t}\ (xxxx)$	

Στην συνέχεια προσδιορίζουμε την μερική λύση

$w = a_{c0} + a_{c1} * t + a_{c2} * t^2$ $\dot{w} = a_{c1} + 2 * a_{c2} * t$ $\ddot{w} = 2 * a_{c2}$	(x.1),(x.2) και (x.3)

$\ddot{w} + c_{y13} * \dot{w} + c_{y14} * w = c_{y15}$	(x.4)

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (x.4) τις (x.1),(x.2) και (x.3) και εκτελούμε πράξεις

$\rightarrow 2 * a_{c2} + c_{y13} * (a_{c1} + 2 * a_{c2} * t) + c_{y14} * (a_{c0} + a_{c1} * t + a_{c2} * t^2) = c_{y15}$	

$\rightarrow 2 * a_{c2} + c_{y13} * a_{c1} + 2 * c_{y13} * a_{c2} * t + c_{y14} * a_{c0} + c_{y14} * a_{c1} * t + c_{y14} * a_{c2} * t^2 = c_{y15}$	

$\rightarrow 2 * a_{c2} + c_{y13} * a_{c1} + c_{y14} * a_{c0} + (2 * c_{y13} * a_{c2} + c_{y14} * a_{c1}) * t + c_{y14} * a_{c2} * t^2 = c_{y15}$	(x.5)

Για να ορίζεται η εξίσωση (x.5) πρέπει οι όροι του 1ου μέλους να είναι ίσοι με τους αντίστοιχους του 2ου μέλους

$\rightarrow \begin{cases} 2 * a_{c2} + c_{y13} * a_{c1} + c_{y14} * a_{c0} = c_{y15} \\ 2 * c_{y13} * a_{c2} + c_{y14} * a_{c1} = 0 \\ c_{y14} * a_{c2} = 0 \end{cases}$	

$\rightarrow \begin{cases} 2*0+c_{y13}*a_{c1}+c_{y14}*a_{c0}=c_{y15} \\ 2*c_{y13}*0+c_{y14}*a_{c1}=0 \\ a_{c2}=0 \end{cases}$	

$\rightarrow \begin{cases} c_{y13}*a_{c1}+c_{y14}*a_{c0}=c_{y15} \\ c_{y14}*a_{c1}=0 \\ a_{c2}=0 \end{cases}$	

$\rightarrow \begin{cases} c_{y13}*0+c_{y14}*a_{c0}=c_{y15} \\ a_{c1}=0 \\ a_{c2}=0 \end{cases}$	

$\rightarrow \begin{cases} c_{y14}*a_0=c_{y15} \\ a_{c1}=0 \\ a_{c2}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{c0}=\dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \\ a_{c1}=0 \\ a_{c2}=0 \end{cases} \rightarrow w=\dfrac{c_{y15}}{c_{y14}}$	(x.6)

Συνδιάζοντας τις εξισώσεις (xxxx) και (x.6) προκύπτει η τελική λύση

$v=v_{hom}+w \rightarrow v=c_{w1}*e^{\mu_1*t}+c_{w2}*e^{\mu_2*t}+\dfrac{c_{y15}}{c_{y14}}$	(2.2.27)

Η εξίσωση (2.2.27) αποδεικνύει ότι η πλευρική ταχύτητα ***v*** μεταβάλλεται εκθετικά συναρτήσει του χρονου ***t***

<u>2.2.5 Προσδιορισμός συνάρτησης ρυθμού εκτροπής r</u>

Για να προσδιορίσουμε την συνάρτηση του ρυθμού εκτροπής ***r*** εφαρμόζουμε τα ακόλουθα βήματα

<u>Βήμα 1ο</u>

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (2.2.27)

$\dot{v}=\left(c_{w1}*e^{\mu_1*t}+c_{w2}*e^{\mu_2*t}+\dfrac{c_{y15}}{c_{y14}}\right)'$	

$\rightarrow \dot{v}=c_{w1}*\mu_1*e^{\mu_1*t}+c_{w2}*\mu_2*e^{\mu_2*t}$	(2.2.28)

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.2.23) τις (2.2.27) και (2.2.28) και εκτελούμε πράξεις

$r=-\dfrac{1}{c_{y8}}*\dot{v}-\dfrac{c_{y7}}{c_{y8}}*v+\dfrac{c_{y9}}{c_{y8}}$	

$$r = -\frac{1}{c_{y8}} * \left(c_{w1} * \mu_1 * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * \mu_2 * e^{\mu_2 * t} \right) - \frac{c_{y7}}{c_{y8}} * \left(c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} \right) + \frac{c_{y9}}{c_{y8}}$$

$$\rightarrow r = -\frac{1}{c_{y8}} * c_{w1} * \mu_1 * e^{\mu_1 * t} - \frac{1}{c_{y8}} * c_{w2} * \mu_2 * e^{\mu_2 * t} - \frac{c_{y7}}{c_{y8}} * c_{w1} * e^{\mu_1 * t} - \frac{c_{y7}}{c_{y8}} * c_{w2} * e^{\mu_2 * t} - \frac{c_{y7}}{c_{y8}} * \frac{c_{y15}}{c_{y14}} + \frac{c_{y9}}{c_{y8}}$$

$$\rightarrow r = \left(-\frac{1}{c_{y8}} * \mu_1 - \frac{c_{y7}}{c_{y8}} \right) * c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + \left(-\frac{1}{c_{y8}} * \mu_2 - \frac{c_{y7}}{c_{y8}} \right) * c_{w2} * e^{\mu_2 * t} - \frac{c_{y7}}{c_{y8}} * \frac{c_{y15}}{c_{y14}} + \frac{c_{y9}}{c_{y8}} \qquad (2.2.29)$$

Προς διευκόλυνση των πράξεων που απαιτούνται ορίζουμε τις σταθερές

$$c_{y16} = -\frac{1}{c_{y8}} * \mu_1 - \frac{c_{y7}}{c_{y8}}$$

$$c_{y17} = -\frac{1}{c_{y8}} * \mu_2 - \frac{c_{y7}}{c_{y8}}$$

$$c_{y18} = -\frac{c_{y7}}{c_{y8}} * \frac{c_{y15}}{c_{y14}} + \frac{c_{y9}}{c_{y8}}$$

Με αυτό τον τρόπο προκύπτει μια απλούστερη μορφή της (2.2.29)

$$r = c_{y16} * c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{y17} * c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18} \qquad (2.2.30)$$

Η εξίσωση (2.2.30) αποδεικνύει ότι ο ρυθμός εκτροπής ***r*** μεταβάλλεται εκθετικά συναρτήσει του χρονου ***t***

<u>Προσδιορισμός σταθερών c_{w1} και c_{w2}</u>

Προσδιορίζουμε τις σταθερές c_{w1} και c_{w2} με την βοήθεια των εξισώσεων (2.2.27) και (2.2.30) θεωρώντας ότι την χρονική στιγμή 0 ***(t=0)*** έχουμε τις αρχικες τιμές για την πλευρική ταχύτητα και τον ρυθμό εκτροπής δηλαδή ***(v=v₀ και r=r₀)***

$$\begin{cases} v = c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} \\ r = c_{y16} * c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{y17} * c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t=0, v=v_0, r=r_0} \begin{cases} v_0 = c_{w1} + c_{w2} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} \\ r_0 = c_{y16} * c_{w1} + c_{y17} * c_{w2} + c_{y18} \end{cases}$$

$\rightarrow \begin{cases} c_{w1} + c_{w2} = v_0 - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \\ c_{y16} * c_{w1} + c_{y17} * c_{w2} = r_0 - c_{y18} \end{cases}$	

Λύνουμε το σύστημα με την μέθοδο Cramer (Ορίζουσες)

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_{y16} & c_{y17} \end{vmatrix} = c_{y17} - c_{y16} \neq 0$ $D_{c_{w1}} = \begin{vmatrix} v_0 - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} & 1 \\ r_0 - c_{y18} & c_{y17} \end{vmatrix} = \left(v_0 - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \right) * c_{y17} - \left(r_0 - c_{y18} \right)$ $D_{c_{w2}} = \begin{vmatrix} 1 & v_0 - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \\ c_{y16} & r_0 - c_{y18} \end{vmatrix} = \left(r_0 - c_{y18} \right) - \left(v_0 - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \right) * c_{y16}$	

$c_{w1} = \dfrac{D_{c_{w1}}}{D} = \dfrac{\left(v_0 - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \right) * c_{y17} - \left(r_0 - c_{y18} \right)}{c_{y17} - c_{y16}}$ $c_{w2} = \dfrac{D_{c_{w2}}}{D} = \dfrac{\left(r_0 - c_{y18} \right) - \left(v_0 - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \right) * c_{y16}}{c_{y17} - c_{y16}}$	(2.2.31) και (2.2.32)

2.2.6 Προσδιορισμός κρίσιμης ταχύτητας u_{cr}

Για να προσδιορίσουμε την ταχύτητα u_{cr} εφαρμόζουμε τα ακόλουθα βήματα

Βήμα 1ο

Γράφουμε το σύστημα των εξισώσεων (2.2.23) και (2.2.24) σε μορφή πινάκων

$\begin{cases} \dot{v} = -c_{y7} * v - c_{y8} * r + c_{y9} \\ \dot{r} = c_{y10} * v + c_{y11} * r + c_{y12} \end{cases}$	

$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{y7} & -c_{y8} \\ c_{y10} & c_{y11} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{y9} \\ c_{y12} \end{bmatrix}$	

$A = \begin{bmatrix} -c_{y7} & -c_{y8} \\ c_{y10} & c_{y11} \end{bmatrix} \rightarrow \lvert A \rvert = \begin{vmatrix} -c_{y7} & -c_{y8} \\ c_{y10} & c_{y11} \end{vmatrix} = -c_{y7} * c_{y11} + c_{y10} * c_{y8}$	

Για να οριστεί η ταχύτητα u_{cr} πρέπει η ορίζουσα του πινάκα A να είναι ίση με 0. Με αυτή την συνθήκη εκτελούμε τις ακόλουθες πράξεις

$$|A| = 0 \rightarrow -c_{y7} * c_{y11} + c_{y10} * c_{y8} = 0 \rightarrow c_{y10} * c_{y8} = c_{y7} * c_{y11}$$

$$\rightarrow \frac{c_{y5} * \alpha_2 - c_{y2} * \alpha_1}{J_z * u_\sigma} * \left(\frac{c_{y3} + c_{y6}}{m * u_\sigma} + u_\sigma \right) = \frac{c_{y2} + c_{y5}}{m * u_\sigma} * \frac{c_{y6} * \alpha_2 - c_{y3} * \alpha_1}{J_z * u_\sigma}$$

$$\rightarrow \frac{c_{y5} * \alpha_2 - c_{y2} * \alpha_1}{J_z * u_\sigma} * \frac{c_{y3} + c_{y6} + m * u_\sigma^2}{m * u_\sigma} = \frac{c_{y2} + c_{y5}}{m * u_\sigma} * \frac{c_{y6} * \alpha_2 - c_{y3} * \alpha_1}{J_z * u_\sigma}$$

$$\rightarrow \left(c_{y5} * \alpha_2 - c_{y2} * \alpha_1 \right) * \left(c_{y3} + c_{y6} + m * u_\sigma^2 \right) = \left(c_{y2} + c_{y5} \right) * \left(c_{y6} * \alpha_2 - c_{y3} * \alpha_1 \right)$$

$$\rightarrow u_\sigma = \sqrt{\frac{1}{m} \left[\frac{\left(c_{y2} + c_{y5} \right) * \left(c_{y6} * \alpha_2 - c_{y3} * \alpha_1 \right)}{c_{y5} * \alpha_2 - c_{y2} * \alpha_1} - \left(c_{y3} + c_{y6} \right) \right]} \qquad (2.2.33)$$

Από την εξίσωση (2.2.33) προκύπτει ότι :

α) η κρίσιμη ταχύτητα u_{cr} δεν εξαρτάται από την ροπή αδρανείας J_z
β) για να ορίζεται η κρίσιμη ταχύτητα u_{cr} πρέπει πάντα να ισχύει η ανίσωση $C_1*\alpha_1 - C_2*\alpha_2 > 0$ ή $c_{y3} + c_{y6} > 0$ (αυτό ισχύει όταν το όχημα υπερστρέφει οπότε η κρίσιμη ταχύτητα u_{cr} δεν επηρεάζεται από την γωνία διεύθυνσης δ).

2.2.7 Προσδιορισμός συνάρτησης γωνίας εκτροπής ψ

Για να προσδιορίσουμε την συνάρτηση της γωνίας εκτροπής ψ εφαρμόζουμε τα ακόλουθα βήματα

Βήμα 1ο

Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας εκτροπής $d\psi/dt$ είναι ίσος με τον ρυθμό εκτροπής r

$$\dot{\psi} = r = c_{y16} * c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{y17} * c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18} \qquad (2.2.34)$$

Βήμα 2ο

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση (2.2.34) και εκτελούμε τις ακόλουθες πράξεις

$$\rightarrow \psi = \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} * e^{\mu_1 * t} + \frac{c_{y17} * c_{w2}}{\mu_2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18} * t + c_\psi$$

$$t = 0, \psi = \psi_0 \rightarrow \psi_0 = \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} + \frac{c_{y17} * c_{w2}}{\mu_2} + c_\psi \rightarrow c_\psi = \psi_0 - \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} - \frac{c_{y17} * c_{w2}}{\mu_2}$$

$$\psi = \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} * e^{\mu_1 * t} + \frac{c_{y17} * c_{w2}}{\mu_2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18} * t + \psi_0 - \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} - \frac{c_{y17} * c_{w2}}{\mu_2} \qquad (2.2.35)$$

2.3 Προσδιορισμός Κινηματικών και Δυναμικών Μεγεθών στο Γραμμικό Μοντέλο Οχήματος ενός Ίχνους

Στην Ενότητα 2.2 προσδιορίσαμε τα 6 βασικά κινηματικά μεγέθη συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με τις εξισώσεις

$u = c$	(2.2.20)
$v = c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}}$	(2.2.27)
$r = c_{y16} * c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{y17} * c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18}$	(2.2.30)
$\psi = \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} * e^{\mu_1 * t} + \frac{c_{y17} * c_{w2}}{\mu_2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18} * t + \psi_0 - \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} - \frac{c_{y17} * c_{w2}}{\mu_2}$	(2.2.35)

$\begin{cases} \dot{v} = -c_{y7} * v - c_{y8} * r + c_{y9} \\ \dot{r} = c_{y10} * v + c_{y11} * r + c_{y12} \end{cases}$	(2.2.23) και (2.2.24)

2.3.1 Προσδιορισμός κινηματικών μεγεθών

Δίνοντας τιμές στην χρονική στιγμή t μπορούμε να υπολογίσουμε τα 6 αυτά μεγέθη. Στην συνέχεια με τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στο 1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα μεγέθη σε κάθε χρονική στιγμή t με την ακόλουθη σειρά.

$GC = \sqrt{S^2 + R^2}$	(2.3.1)
$R = \frac{u}{r}$	(1.14 a) ή (2.3.2)
$S = -\frac{v}{r}$	(1.14 b) ή (2.3.3)

$\beta = \frac{v}{u}$	(1.17 b) ή (2.3.4)

$\rho = \frac{r}{u} = \frac{1}{R}$	(1.18) ή (2.3.5)

$l * \rho = l * \frac{r}{u} = \frac{l}{R}$	(1.19) ή (2.3.6)

$a_x = \dot{u} - v * r = \dot{u} - u^2 * \beta * \rho$	(1.23) ή (2.2.1) ή (2.3.7)

$a_y = \dot{v} + u * r = u * \dot{\beta} + \dot{u} * \beta + u^2 * \rho$	(1.24) ή (2.2.2) ή (2.3.8)

$\alpha_G = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}$	(2.3.9)
$\alpha_t = \alpha_x * \cos\beta + \alpha_y * \sin\beta$	(2.3.10)
$\alpha_n = -\alpha_x * \sin\beta + \alpha_y * \cos\beta$	(2.3.11)

$\cos(\hat{\beta}) = \frac{u}{V_G}, \sin(\hat{\beta}) = \frac{v}{V_G}, V_G = \lvert V_G \rvert = \sqrt{u^2 + v^2}$	(1.29) ή (2.3.12)

$\dot{R} = \left(\frac{u}{r}\right)' = \frac{\dot{u} * r - \dot{r} * u}{r^2}$	(2.3.13)
$\dot{S} = \left(-\frac{v}{r}\right)' = -\frac{\dot{v} * r - \dot{r} * v}{r^2}$	(2.3.14)
$a_C = r * \sqrt{\dot{R}^2 + \dot{S}^2}$	(2.3.15)

$R_G = \frac{V_G^2}{a_n} = \frac{V_G}{r + \frac{\dot{v} * u - \dot{u} * v}{V_G^2}}$	(1.30) ή (2.3.16)

$\rho_G = \frac{1}{R_G} = \frac{r + \dot{\beta} * \cos^2(\hat{\beta})}{u} * \cos^2(\hat{\beta}) = \frac{r}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{\dot{v} * u - \dot{u} * v}{\sqrt{(u^2 + v^2)^3}}$	(1.31) ή (2.3.17)

$\tan\xi = \frac{\dot{r}}{r^2}$	(1.35 a) ή (2.3.18)
$\lvert KG \rvert = \frac{a_G}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^4}}$	(1.35 b) ή (2.3.19)

$u_{11} = u_{21} = u - \frac{r * t_1}{2}$	(2.1.15) ή (2.3.20)
$u_{12} = u_{22} = u + \frac{r * t_1}{2}$	(2.1.16) ή (2.3.21)
$v_{11} = v_{21} = v + r * \alpha_1$	(2.1.17) ή (2.3.22)
$v_{12} = v_{22} = v - r * \alpha_1$	(2.1.18) ή (2.3.23)
$V_{11} = \sqrt{u_{11}^2 + v_{11}^2}$	(2.1.19) ή (2.3.24)
$V_{12} = \sqrt{u_{12}^2 + v_{12}^2}$	(2.1.20) ή (2.3.25)
$V_{21} = \sqrt{u_{21}^2 + v_{21}^2}$	(2.1.21) ή (2.3.26)
$V_{22} = \sqrt{u_{22}^2 + v_{22}^2}$	(2.1.22) ή (2.3.27)

$\beta_{11} = \arctan \frac{v_{11}}{u_{11}}$	(2.1.23) ή (2.3.28)
$\beta_{12} = \arctan \frac{v_{12}}{u_{12}}$	(2.1.24) ή (2.3.29)
$\beta_{21} = \arctan \frac{v_{21}}{u_{21}}$	(2.1.25) ή (2.3.30)

$\beta_{22} = \arctan \frac{v_{22}}{u_{22}}$	(2.1.26) ή (2.3.31)

2.3.2 Προσδιορισμός δυναμικών μεγεθών και αναρτήσεις

$Y_1 = c_{y1} - c_{y2} * \frac{v}{u} - c_{y3} * \frac{r}{u}$ $Y_2 = c_{y4} - c_{y5} * \frac{v}{u} - c_{y6} * \frac{r}{u}$	(2.2.17) και (2.2.18) ή (2.3.32) και (2.3.33)

$Y = Y_1 + Y_2$	(1.61 b) ή (2.3.34)

$N_X = \Delta X_1 * t_1 + \Delta X_2 * t_2 = 0$	(2.1.45) ή (2.2.19) ή (2.3.35)

$N_Y = Y_1 * \alpha_1 - Y_2 * \alpha_2$	(1.65 a) ή (2.3.36)

$J_z * \dot{r} = N_X + N_Y = N$	(1.66) ή (2.2.37)

$X_\alpha = \frac{1}{2} * \rho_\alpha * (V_\alpha)^2 * C_x * S_\alpha$	(1.52 a) ή (2.3.38)
$Y_\alpha = \frac{1}{2} * \rho_\alpha * (V_\alpha)^2 * C_y * S_\alpha$	(1.52 b) ή (2.3.39)
$Z_\alpha = \frac{1}{2} * \rho_\alpha * (V_\alpha)^2 * C_z * S_\alpha$	(1.52 c) ή (2.3.40)

$Z_1^\alpha = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_{z1} * S_\alpha * V_\alpha^2$ $Z_2^\alpha = \frac{1}{2} * \rho_{air} * C_{z2} * S_\alpha * V_\alpha^2$ $Z_\alpha = Z_1^\alpha + Z_2^\alpha$ $F_\alpha = \sqrt{X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2}$ $M_{\alpha y} = Z_\alpha * \alpha_2 - Z_1^\alpha * (\alpha_1 + \alpha_2) + X_\alpha * h$	(2.3.41), (2.3.42), (2.3.43), (2.3.44) και (2.3.45)

$X = m * \alpha_x$ $Y = m * \alpha_y$ $Z = 0$ $L = -J_{zx} * \dot{r}$ $M = -J_{zx} * r^2$ $N = J_z * \dot{r}$ $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ $M_G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$	(2.3.46), (2.3.47), (2.3.48), (2.3.49) και (2.3.50)

$x_N = \frac{N_Y}{Y}$	(1.68) ή (2.2.12) ή (2.3.51)

$q^b = \frac{a_2^b * q_1 + a_1^b * q_2}{a_1^b + a_2^b} = \frac{a_2^b * q_1 + a_1^b * q_2}{l}$	(1.98) ή (2.3.52)

$L^b * i = Y * (h - q^b) * i = m * \alpha_y * (h - q^b) * i$	(1.97) ή (2.3.53)

$\varphi_1^p = \frac{1}{k_{\varphi_1}^p} * \frac{k_{\varphi_1} * k_{\varphi_2}}{k_\varphi} * \left[\frac{Y * (h - q^b)}{k_{\varphi_2}} + \frac{Y_1 * q_1}{k_{\varphi_1}^s} + \frac{Y_1 * q_1}{k_{\varphi_2}^s} + \frac{Y_1 * q_1 + Y_2 * q_2}{k_{\varphi_2}^p} \right]$	(1.114) ή (2.3.54)
$\varphi_2^p = \frac{1}{k_{\varphi_2}^p} * \frac{k_{\varphi_1} * k_{\varphi_2}}{k_\varphi} * \left[\frac{Y * (h - q^b)}{k_{\varphi_1}} + \frac{Y_2 * q_2}{k_{\varphi_1}^s} + \frac{Y_2 * q_2}{k_{\varphi_2}^s} + \frac{Y_1 * q_1 + Y_2 * q_2}{k_{\varphi_1}^p} \right]$	(1.115) ή (2.3.55)
$\varphi_1^s = \frac{1}{k_{\varphi_1}^s} * \frac{k_{\varphi_1} * k_{\varphi_2}}{k_\varphi} * \left[\frac{Y * (h - q^b)}{k_{\varphi_2}} - \frac{Y_1 * q_1}{k_{\varphi_1}^p} + \frac{Y_2 * q_2}{k_{\varphi_2}^p} \right]$	(1.116) ή (2.3.56)
$\varphi_2^s = \frac{1}{k_{\varphi_2}^s} * \frac{k_{\varphi_1} * k_{\varphi_2}}{k_\varphi} * \left[\frac{Y * (h - q^b)}{k_{\varphi_1}} + \frac{Y_1 * q_1}{k_{\varphi_1}^p} - \frac{Y_2 * q_2}{k_{\varphi_2}^p} \right]$	(1.117) ή (2.3.57)

$\Delta Z_1 = \frac{k_{\varphi 1}^p}{t_1} * \varphi_1^p$	(1.119 a) ή (2.3.58)
$\Delta Z_2 = \frac{k_{\varphi 2}^p}{t_2} * \varphi_2^p$	(1.119 b) ή (2.3.59)

$Z_1^0 = \frac{m * g * \alpha_2}{l}$	(1.71 b) ή (2.3.60)
$Z_2^0 = \frac{m * g * \alpha_1}{l}$	(1.71 c) ή (2.3.61)

$\Delta Z = -\frac{m * \alpha_x * h}{l} + \frac{J_{zx} * r^2}{l}$	(1.71 a) ή (2.3.62)

$Z_1 = Z_1^0 + \Delta Z - Z_1^a$	(1.70 a) ή (2.3.63)
$Z_2 = Z_2^0 - \Delta Z - Z_2^a$	(1.70 b) ή (2.3.64)

$F_{z11} = Z_{11} = \frac{Z_1^0 + \Delta Z - Z_1^a}{2} - \Delta Z_1$	(1.72 a) ή (2.3.65)
$F_{z12} = Z_{12} = \frac{Z_1^0 + \Delta Z - Z_1^a}{2} + \Delta Z_1$	(1.72 b) ή (2.3.66)
$F_{z21} = Z_{21} = \frac{Z_2^0 - \Delta Z - Z_2^a}{2} - \Delta Z_2$	(1.72 c) ή (2.3.67)
$F_{z22} = Z_{22} = \frac{Z_2^0 - \Delta Z - Z_2^a}{2} + \Delta Z_2$	(1.72 d) ή (2.3.68)

$Y_{11} = \frac{Y_1 * Z_{11}}{Z_{11} + Z_{12}}$	(2.3.69)
$Y_{12} = \frac{Y_1 * Z_{12}}{Z_{11} + Z_{12}}$	(2.3.70)
$Y_{21} = \frac{Y_2 * Z_{21}}{Z_{21} + Z_{22}}$	(2.3.71)
$Y_{22} = \frac{Y_2 * Z_{22}}{Z_{21} + Z_{22}}$	(2.3.72)

$\Delta Y_1 = (Y_{12} - Y_{11}) / 2$	(1.58 c) ή (2.3.73)
$\Delta Y_2 = (Y_{22} - Y_{21}) / 2$	(1.58 d) ή (2.3.74)

$b_1 = \frac{2 * c_1 * q_1}{\tau_1}$ $b_2 = \frac{2 * c_2 * q_2}{\tau_2}$ $\Delta\tau_1 = -\frac{4 * b_1}{k_{z1}^s * c_1} * \Delta Y_1$ $\Delta\tau_2 = -\frac{4 * b_2}{k_{z2}^s * c_2} * \Delta Y_2$	(2.1.73),(2.1.74),(2.1.75) και (2.1.76) ή (2.3.75),(2.3.76),(2.3.77) και (2.3.78)

$\Delta\gamma_{11} = -\frac{q_1 - b_1}{b_1} * \varphi_1^s + \varphi_1^p + \frac{1}{2*b_1} * \Delta\tau_1$ $\Delta\gamma_{12} = -\frac{q_1 - b_1}{b_1} * \varphi_1^s + \varphi_1^p - \frac{1}{2*b_1} * \Delta\tau_1$ $\Delta\gamma_{21} = -\frac{q_2 - b_2}{b_2} * \varphi_2^s + \varphi_2^p + \frac{1}{2*b_2} * \Delta\tau_2$ $\Delta\gamma_{22} = -\frac{q_2 - b_2}{b_2} * \varphi_2^s + \varphi_2^p - \frac{1}{2*b_2} * \Delta\tau_2$	(2.1.77),(2.1.78),(2.1.79) και (2.1.80) ή (2.3.79),(2.3.80),(2.3.81) και (2.3.82)

$z_1^s = -\frac{c_1}{2*b_1} * \Delta\tau_1$ $z_2^s = -\frac{c_2}{2*b_2} * \Delta\tau_2$ $z_1^p = \frac{k_{z1}^s}{k_{z1}^p} * z_1^s$ $z_2^p = \frac{k_{z2}^s}{k_{z2}^p} * z_2^s$ $z_1 = \frac{k_{z1}^s}{k_{z1}} * z_1^s$ $z_2 = \frac{k_{z2}^s}{k_{z2}} * z_2^s$	(2.1.81),(2.1.82),(2.1.83),(2.1.84),(2.1.85) και (2.1.86) ή (2.3.83),(2.3.84),(2.3.85),(2.3.86),(2.3.87) και (2.3.88)

$Z_1^b = k_{z1} * z_1$ $Z_2^b = k_{z2} * z_2$	(2.1.87) και (2.1.88) ή (2.3.89) και (2.3.90)

$\tan(\delta_1) = \frac{(X_\alpha + m * \alpha_x) * (Y_{22} - Y_{21}) * t_2}{(Y_{11} + Y_{12}) * (Y_{22} - Y_{21}) * t_2 - (Y_{21} + Y_{22}) * (Y_{12} - Y_{11}) * t_1}$ $\tan(\delta_2) = \frac{-(X_\alpha + m * \alpha_x) * (Y_{12} - Y_{11}) * t_1}{(Y_{11} + Y_{12}) * (Y_{22} - Y_{21}) * t_2 - (Y_{21} + Y_{22}) * (Y_{12} - Y_{11}) * t_1}$ $\delta_{11} = \delta_{12} = \delta_1 = \arctan(\delta_1)$ $\delta_{21} = \delta_{22} = \delta_2 = \arctan(\delta_2)$	(2.1.89),(2.1.90),(2.1.91) και (2.1.92) ή (2.3.91),(2.3.92),(2.3.93) και (2.3.94)

$X_{11} = Y_{11} * \tan(\delta_{11})$ $X_{12} = Y_{12} * \tan(\delta_{12})$ $X_{21} = Y_{21} * \tan(\delta_{21})$ $X_{22} = Y_{22} * \tan(\delta_{22})$ $X_1 = X_{11} + X_{12}$ $X_2 = X_{21} + X_{22}$ $\Delta X_1 = X_{12} - X_{11}$ $\Delta X_2 = X_{22} - X_{21}$	(2.1.93),(2.1.94), (2.1.95),(2.1.96), (2.1.97),(2.1.98),(2.1.99) και (2.1.100) ή (2.3.95),(2.3.96), (2.3.97),(2.3.98), (2.3.99),(2.3.100),(2.3.101) και (2.3.102)

$a_{11} = \delta_{11} - \beta_{11}$ $a_{12} = \delta_{12} - \beta_{12}$ $a_{21} = \delta_{21} - \beta_{21}$ $a_{22} = \delta_{22} - \beta_{22}$	(2.1.101),(2.1.102),(2.1.103) και (2.1.104) ή (2.3.105),(2.3.106),(2.3.107) και (2.3.108)

$\omega_{11} * r_1 = u_{11} * \cos(\delta_{11}) + v_{11} * \sin(\delta_{11})$ $\omega_{12} * r_1 = u_{12} * \cos(\delta_{12}) + v_{12} * \sin(\delta_{12})$ $\omega_{21} * r_2 = u_{21} * \cos(\delta_{21}) + v_{21} * \sin(\delta_{21})$ $\omega_{22} * r_2 = u_{22} * \cos(\delta_{22}) + v_{21} * \sin(\delta_{22})$	(2.1.105),(2.1.106),(2.1.107) και (2.1.108) ή (2.3.109),(2.3.110),(2.3.111) και (2.3.112)

$\sigma_{y11} = \dfrac{v_{11} * \cos(\delta_{11}) - u_{11} * \sin(\delta_{11})}{\omega_{11} * r_1}$ $\sigma_{y12} = \dfrac{v_{12} * \cos(\delta_{12}) - u_{12} * \sin(\delta_{12})}{\omega_{12} * r_1}$ $\sigma_{y21} = \dfrac{v_{21} * \cos(\delta_{21}) - u_{21} * \sin(\delta_{21})}{\omega_{21} * r_2}$ $\sigma_{y22} = \dfrac{v_{22} * \cos(\delta_{22}) - u_{22} * \sin(\delta_{22})}{\omega_{22} * r_2}$	(2.1.109),(2.1.110),(2.1.111) και (2.1.112) ή (2.3.113),(2.3.114),(2.3.115) και (2.3.116)

$\mu_1 = \dfrac{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}{Z_1} = \mu_{11} = \mu_{12}$ $\mu_2 = \dfrac{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}{Z_2} = \mu_{21} = \mu_{22}$	(2.1.113) και (2.1.114) ή (2.3.117) και (2.3.118)

2.4 Προσδιορισμός εξίσωσης τροχιάς στο Γραμμικό Μοντέλο Οχήματος ενός Ίχνους

Στην Ενότητα 2.2 προσδιορίσαμε τα 6 βασικά κινηματικά μεγέθη συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με τις εξισώσεις

$u = c$	(2.2.20)
$v = c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}}$	(2.2.27)
$r = c_{y16} * c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{y17} * c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18}$	(2.2.30)
$\psi = \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} * e^{\mu_1 * t} + \frac{c_{y17} * c_{w2}}{\mu_2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18} * t + \psi_0 - \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} - \frac{c_{y17} * c_{w2}}{\mu_2}$	(2.2.35)

$\begin{cases} \dot{v} = -c_{y7} * v - c_{y8} * r + c_{y9} \\ \dot{r} = c_{y10} * v + c_{y11} * r + c_{y12} \end{cases}$	(2.2.23) και (2.2.24)

Στην Ενότητα 1.2.2β προσδιορίσαμε τις θέσεις ***$x_0(t)$***, ***$y_0(t)$*** που δίνουν την τροχιά του ***G***, σε σχέση με το ακίνητο σύστημα Αναφοράς.

$x_0(\hat{t}) = x_0(0) + \int_0^{\hat{t}} u_0(t)\,dt$ $x_0(\hat{t}) = x_0(0) + \int_0^{\hat{t}} \left(u(t) * \cos(\psi(t)) - v(t) * \sin(\psi(t))\right) dt$	(1.11 a)
$y_0(\hat{t}) = y_0(0) + \int_0^{\hat{t}} v_0(t)\,dt$ $y_0(\hat{t}) = y_0(0) + \int_0^{\hat{t}} \left(u(t) * \sin(\psi(t)) + v(t) * \cos(\psi(t))\right) dt$	(1.11 b)

Προς διευκόλυνση των πράξεων που απαιτούνται ορίζουμε τις σταθερές

$c_{\psi 1} = \psi_0 - \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} - \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_2}$ $c_{\psi 2} = \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1}$ $c_{\psi 3} = \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_2}$	

Έτσι προκύπτει μια απλούστερη μορφή της (2.2.35)

$\psi = c_{\psi 1} + c_{y18} * t + c_{\psi 2} * e^{\mu_1 * t} + c_{\psi 3} * e^{\mu_2 * t}$	(2.4.1)

Προσεγγίζουμε την εξίσωση (2.4.1) με γραμμική εξίσωση άρα έχουμε

$\psi = c_{\psi 1} + c_{y18} * t + c_{\psi 2} * e^{\mu_1 * t} + c_{\psi 3} * e^{\mu_2 * t} \approx -C_{01} + C_{02} * t$	(2.4.2)

Με την εξίσωση (2.4.2) και την βοήθεια των εξισώσεων (1.11 a) και (1.11 b) θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες της τροχιάς x_0 και y_0 ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα

Βήμα 1ο

$$\begin{cases} x_0 = \int (u*\cos\psi - v*\sin\psi)\,dt + x_0(0) \quad (1) \\ y_0 = \int (u*\sin\psi + v*\cos\psi)\,dt + y_0(0) \quad (2) \end{cases}$$

$$I_1 = \int u*\cos\psi dt \quad (3)$$

$$I_2 = \int v*\sin\psi dt \quad (4)$$

$$I_3 = \int u*\sin\psi dt \quad (5)$$

$$I_4 = \int v*\cos\psi dt \quad (6)$$

$$(1),(2) \xrightarrow[(5),(6)]{(3),(4)} \begin{cases} x_0 = I_1 - I_2 + x_0(0) \quad (7) \\ y_0 = I_3 + I_4 + y_0(0) \quad (8) \end{cases}$$

Στο επόμενα βήματα από τις εξισώσεις (3),(4),(5) και (6) θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα I_1, I_2, I_3 και I_4 και τις αρχικές συνθήκες $x_0(0)$ και $y_0(0)$

Βήμα 2ο (υπολογισμός I_1)

$$I_1 = \int u*\cos\psi dt = \int c*\cos(-C_{01} + C_{02}*t)\,dt$$

$$\left(\sin(-C_{01} + C_{02}*t)\right)' = (-C_{01} + C_{02}*t)'*\cos(-C_{01} + C_{02}*t) = C_{02}*\cos(-C_{01} + C_{02}*t)$$

$$\rightarrow \cos(-C_{01} + C_{02}*t) = \frac{1}{C_{02}}*\left(\sin(-C_{01} + C_{02}*t)\right)'$$

$$I_1 = \int c*\frac{1}{C_{02}}*\left(\sin(-C_{01} + C_{02}*t)\right)'\,dt = \frac{c}{C_{02}}*\sin(-C_{01} + C_{02}*t)$$

Βήμα 3ο (υπολογισμός I_2)

$$I_2 = \int \left(c_{w1}*e^{\mu_1*t} + c_{w2}*e^{\mu_2*t} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} \right)*\sin(-C_{01} + C_{02}*t)\,dt$$

$$= \int c_{w1}*e^{\mu_1*t}*\sin(-C_{01} + C_{02}*t)\,dt + \int c_{w2}*e^{\mu_2*t}*\sin(-C_{01} + C_{02}*t)\,dt + \int \frac{c_{y15}}{c_{y14}}*\sin(-C_{01} + C_{02}*t)\,dt$$

$$= c_{w1}*\int e^{\mu_1*t}*\sin(-C_{01} + C_{02}*t)\,dt + c_{w2}*\int e^{\mu_2*t}*\sin(-C_{01} + C_{02}*t)\,dt + \frac{c_{y15}}{c_{y14}}*\int \sin(-C_{01} + C_{02}*t)\,dt$$

$$I_{21} = \int e^{\mu_1 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$
$$I_{22} = \int e^{\mu_2 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$
$$I_{23} = \int \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$I_2 = c_{w1} * I_{21} + c_{w2} * I_{22} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{23} \quad (9)$$

Με την βοήθεια της μεθόδου της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα I_{21} και I_{22} άρα προκύπτει

$$I_{21} = \int e^{\mu_1 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt = \frac{1}{\mu_1} * \int \left(e^{\mu_1 * t}\right)' * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{C_{02}^{\ 2}}{\mu_1^{\ 2}}\right) I_{21} = \frac{1}{\mu_1} * e^{\mu_1 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) - \frac{1}{\mu_1^{\ 2}} * C_{02} * e^{\mu_1 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$I_{22} = \int e^{\mu_2 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt = \frac{1}{\mu_2} * \int \left(e^{\mu_2 * t}\right)' * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{C_{02}^{\ 2}}{\mu_2^{\ 2}}\right) I_{22} = \frac{1}{\mu_2} * e^{\mu_2 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) - \frac{1}{\mu_2^{\ 2}} * C_{02} * e^{\mu_2 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

Αντίθετα το ολοκλήρωμα I_{23} προκύπτει με απλή ολοκλήρωση

$$I_{23} = \int \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt = -\frac{1}{C_{02}} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

<u>Βήμα 4ο (υπολογισμός I_3)</u>

$$I_3 = \int c * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$\left(\cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)\right)' = -C_{02} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) \rightarrow \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) = -\frac{1}{C_{02}} * \left(\cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)\right)'$$

$$I_3 = \int c * \left(-\frac{1}{C_{02}} * \left(\cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)\right)'\right) dt = -\frac{c}{C_{02}} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

<u>Βήμα 5ο (υπολογισμός I_4)</u>

$$I_4 = \int \left(c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}}\right) * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$= \int c_{w1} * e^{\mu_1 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt + \int c_{w2} * e^{\mu_2 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt + \int \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$= c_{w1} * \int e^{\mu_1 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt + c_{w2} * \int e^{\mu_2 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * \int \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$I_{41} = \int e^{\mu_1 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$I_{42} = \int e^{\mu_2 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$I_{43} = \int \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$I_4 = c_{w1} * I_{41} + c_{w2} * I_{42} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{43} \quad (10)$$

Με την βοήθεια της μεθόδου της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα I_{41} και I_{42} άρα προκύπτει

$$I_{41} = \int e^{\mu_1 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt = \frac{1}{\mu_1} * \int \left(e^{\mu_1 * t}\right)' * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{1}{\mu_1^2} * C_{02}^2\right) I_{41} = \frac{1}{\mu_1} * e^{\mu_1 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) + \frac{1}{\mu_1^2} * C_{02} * e^{\mu_1 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$I_{42} = \int e^{\mu_2 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt = \frac{1}{\mu_2} * \int \left(e^{\mu_2 * t}\right)' * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{1}{\mu_2^2} * C_{02}^2\right) I_{42} = \frac{1}{\mu_2} * e^{\mu_2 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) + \frac{1}{\mu_2^2} * C_{02} * e^{\mu_2 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

Αντίθετα το ολοκλήρωμα I_{43} προκύπτει με απλή ολοκλήρωση

$$I_{43} = \int \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) dt = \frac{1}{C_{02}} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

Βήμα 6ο (υπολογισμός αρχικών συνθηκών $x_0(0)$ και $y_0(0)$)

Αρχικά ξαναγράφουμε τις εξισώσεις που προέκυψαν από τα βήματα 1ο ,2ο ,3ο και 4ο

$$I_1 = \frac{c}{C_{02}} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$\left(1 + \frac{C_{02}^{\ 2}}{\mu_1^{\ 2}}\right) * I_{21} = \frac{1}{\mu_1} * e^{\mu_1 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) - \frac{1}{\mu_1^{\ 2}} * C_{02} * e^{\mu_1 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$\left(1 + \frac{C_{02}^{\ 2}}{\mu_2^{\ 2}}\right) * I_{22} = \frac{1}{\mu_2} * e^{\mu_2 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) - \frac{1}{\mu_2^{\ 2}} * C_{02} * e^{\mu_2 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$I_{23} = -\frac{1}{C_{02}} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$I_3 = -\frac{c}{C_{02}} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$\left(1 + \frac{C_{02}^{\ 2}}{\mu_1^{\ 2}}\right) * I_{41} = \frac{1}{\mu_1} * e^{\mu_1 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) + \frac{1}{\mu_1^{\ 2}} * C_{02} * e^{\mu_1 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$\left(1 + \frac{C_{02}^{\ 2}}{\mu_2^{\ 2}}\right) * I_{42} = \frac{1}{\mu_2} * e^{\mu_2 * t} * \cos\left(-C_{01} + C_{02} * t\right) + \frac{1}{\mu_2^{\ 2}} * C_{02} * e^{\mu_2 * t} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$I_{43} = \frac{1}{C_{02}} * \sin\left(-C_{01} + C_{02} * t\right)$$

$$I_2 = c_{w1} * I_{21} + c_{w2} * I_{22} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{23} \quad (9)$$

$$I_4 = c_{w1} * I_{41} + c_{w2} * I_{42} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{43} \quad (10)$$

Στην συνέχεια αντικαθιστούμε την χρονική στιγμή t_0=0 σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις

$$I_1(0) = \frac{c}{C_{02}} * \sin(-C_{01})$$

$$\left(1+\frac{C_{02}^2}{\mu_1^2}\right) * I_{21}(0) = \frac{1}{\mu_1} * \sin(-C_{01}) - \frac{1}{\mu_1^2} * C_{02} * \cos(-C_{01})$$

$$\left(1+\frac{C_{02}^2}{\mu_2^2}\right) * I_{22}(0) = \frac{1}{\mu_2} * \sin(-C_{01}) - \frac{1}{\mu_2^2} * C_{02} * \cos(-C_{01})$$

$$I_{23}(0) = -\frac{1}{C_{02}} * \cos(-C_{01})$$

$$I_3(0) = -\frac{c}{C_{02}} * \cos(-C_{01})$$

$$\left(1+\frac{C_{02}^2}{\mu_1^2}\right) * I_{41}(0) = \frac{1}{\mu_1} * \cos(-C_{01}) + \frac{1}{\mu_1^2} * C_{02} * \sin(-C_{01})$$

$$\left(1+\frac{C_{02}^2}{\mu_2^2}\right) * I_{42}(0) = \frac{1}{\mu_2} * \cos(-C_{01}) + \frac{1}{\mu_2^2} * C_{02} * \sin(-C_{01})$$

$$I_{43}(0) = \frac{1}{C_{02}} * \sin(-C_{01})$$

$$I_2(0) = c_{w1} * I_{21}(0) + c_{w2} * I_{22}(0) + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{23}(0)$$

$$I_4(0) = c_{w1} * I_{41}(0) + c_{w2} * I_{42}(0) + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{43}(0)$$

Χρησιμοποιούμε τις αντικαταστάσεις που ακολουθούν

$$C_{\mu_1} = 1 + \frac{C_{02}^2}{\mu_1^2}$$

$$C_{\mu_2} = 1 + \frac{C_{02}^2}{\mu_2^2}$$

$$\sin(-C_{01}) = -\sin(C_{01})$$

$$\cos(-C_{01}) = \cos(C_{01})$$

Με την βοήθεια αυτών προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας σταθερών τιμών

$$I_1(0) = -\frac{c}{C_{02}} * \sin(C_{01})$$

$$I_{21}(0) = -\frac{1}{\mu_1 * C_{\mu_1}} * \sin(C_{01}) - \frac{1}{\mu_1^2 * C_{\mu_1}} * C_{02} * \cos(C_{01})$$

$$I_{22}(0) = -\frac{1}{\mu_2 * C_{\mu_2}} * \sin(C_{01}) - \frac{1}{\mu_2^2 * C_{\mu_2}} * C_{02} * \cos(C_{01})$$

$$I_{23}(0) = -\frac{1}{C_{02}} * \cos(C_{01})$$

$$I_3(0) = -\frac{c}{C_{02}} * \cos(C_{01})$$

$$I_{41}(0) = \frac{1}{\mu_1 * C_{\mu_1}} * \cos(C_{01}) - \frac{1}{\mu_1^2 * C_{\mu_1}} * C_{02} * \sin(C_{01})$$

$$I_{42}(0) = \frac{1}{\mu_2 * C_{\mu_2}} * \cos(C_{01}) - \frac{1}{\mu_2^2 * C_{\mu_2}} * C_{02} * \sin(C_{01})$$

$$I_{43}(0) = -\frac{1}{C_{02}} * \sin(C_{01})$$

$$I_2(0) = c_{w1} * I_{21}(0) + c_{w2} * I_{22}(0) + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{23}(0)$$

$$I_4(0) = c_{w1} * I_{41}(0) + c_{w2} * I_{42}(0) + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{43}(0)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (7),(8),(9) και (10) για αρχικές συνθήκες $t_0=0, x_0=0$ και $y_0=0$ προκύπτουν οι τελικές τιμές $x_0(0)$ και $y_0(0)$

$$(7),(8) \xrightarrow[(10)]{(9)} \begin{cases} x_0 = I_1 - c_{w1} * I_{21} - c_{w2} * I_{22} - \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{23} + x_0(0) \\ y_0 = I_3 + c_{w1} * I_{41} + c_{w2} * I_{42} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{43} + y_0(0) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x_0 = y_0 = 0]{t=0} \begin{cases} 0 = I_1(0) - c_{w1} * I_{21}(0) - c_{w2} * I_{22}(0) - \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{23}(0) + x_0(0) \\ 0 = I_3(0) + c_{w1} * I_{41}(0) + c_{w2} * I_{42}(0) + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{43}(0) + y_0(0) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0(0) = -I_1(0) + c_{w1} * I_{21}(0) + c_{w2} * I_{22}(0) + \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{23}(0) \\ y_0(0) = -I_3(0) - c_{w1} * I_{41}(0) - c_{w2} * I_{42}(0) - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} * I_{43}(0) \end{cases}$$

<u>Σχέση που συνδέει την εμπρός ταχύτητα u_0 με την πλευρική ταχύτητα v_0</u>

Σε όλη την διάρκεια της κίνησης του οχήματος ισχύει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} -v * \sin\psi + u * \cos\psi = u_0 \\ u * \sin\psi + v * \cos\psi = v_0 \end{cases}$$

Στόχος μας είναι η απαλοιφή της μεταβλητής ψ οπότε ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

<u>Βήμα 1ο (επίλυση με την μέθοδο των οριζουσών)</u>

$$D = \begin{vmatrix} -v & u \\ u & v \end{vmatrix} = -v^2 - u^2$$

$$D_{\sin\psi} = \begin{vmatrix} u_0 & u \\ v_0 & v \end{vmatrix} = u_0 * v - v_0 * u$$

$$D_{\cos\psi} = \begin{vmatrix} -v & u_0 \\ u & v_0 \end{vmatrix} = -v * v_0 - u * u_0$$

$$\sin\psi = \frac{u_0 * v - v_0 * u}{-v^2 - u^2} = \frac{-u_0 * v + v_0 * u}{v^2 + u^2}$$

$$\cos\psi = \frac{-v * v_0 - u * u_0}{-v^2 - u^2} = \frac{v * v_0 + u * u_0}{v^2 + u^2}$$

<u>Βήμα 2ο (απαλοιφή της μεταβλητής ψ)</u>

Χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική σχέση $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$$\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$$

$$\rightarrow \left(\frac{-u_0 * v + v_0 * u}{v^2 + u^2}\right)^2 + \left(\frac{v * v_0 + u * u_0}{v^2 + u^2}\right)^2 = 1$$

$$\rightarrow (v_0 * u - u_0 * v)^2 + (v * v_0 + u * u_0)^2 = (v^2 + u^2)^2$$

$$\rightarrow (v_0 * u)^2 + (u_0 * v)^2 - 2 * v_0 * u * u_0 * v + (v * v_0)^2 + (u * u_0)^2 + 2 * v * v_0 * u * u_0 = (v^2 + u^2)^2$$

$$\rightarrow (v_0 * u)^2 + (u_0 * v)^2 + (v * v_0)^2 + (u * u_0)^2 = (v^2 + u^2)^2$$

$$\rightarrow v_0^2 * u^2 + u_0^2 * v^2 + v^2 * v_0^2 + u^2 * u_0^2 = (v^2 + u^2)^2$$

$$\rightarrow v_0^2 * (u^2 + v^2) + u_0^2 * (v^2 + u^2) = (v^2 + u^2)^2$$

$$\rightarrow v_0^2 + u_0^2 = v^2 + u^2 \rightarrow v_0^2 + u_0^2 = V_G^2$$

Άρα το όχημα κινείται σε κυκλική τροχιά με ακτίνα την συνιστάμενη ταχύτητα (απόλυτη) V_G

2.5 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΠΛΕΥΡΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΡΥΘΜΟΥ ΕΚΤΡΟΠΗΣ

Για να προσδιορίσουμε την σχέση v=f(r) χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις **(2.2.27), (2.2.30)** και εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα

<u>Βήμα 1ο (σύστημα εξισώσεων)</u>

$$\begin{cases} v = c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \\ r = c_{y16} * c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{y17} * c_{w2} * e^{\mu_2 * t} + c_{y18} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * e^{\mu_2 * t} = v - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \\ c_{y16} * c_{w1} * e^{\mu_1 * t} + c_{y17} * c_{w2} * e^{\mu_2 * t} = r - c_{y18} \end{cases}$$

<u>Βήμα 2ο (επίλυση συστήματος με την βοήθεια οριζουσών)</u>

$$D = \begin{vmatrix} c_{w1} & c_{w2} \\ c_{y16} * c_{w1} & c_{y17} * c_{w2} \end{vmatrix} = c_{w1} * c_{y17} * c_{w2} - c_{w2} * c_{y16} * c_{w1}$$

$$D_{e^{\mu 1 * t}} = \begin{vmatrix} v - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} & c_{w2} \\ r - c_{y18} & c_{y17} * c_{w2} \end{vmatrix} = \left(v - \frac{c_{y15}}{c_{y14}} \right) * c_{y17} * c_{w2} - c_{w2} * (r - c_{y18})$$

$$D_{e^{\mu 2 * t}} = \begin{vmatrix} c_{w1} & v - \dfrac{c_{y15}}{c_{y14}} \\ c_{y16} * c_{w1} & r - c_{y18} \end{vmatrix} = c_{w1} * (r - c_{y18}) - c_{y16} * c_{w1} * \left(v - \frac{c_{y15}}{c_{y14}} \right)$$

Βήμα 3ο (προσδιορισμός $e_{\mu 1t}$ και $e_{\mu 2t}$)

$$e^{\mu_1 * t} = \frac{D_{e^{\mu_1 * t}}}{D} = \frac{\left(v - \frac{c_{y15}}{c_{y14}}\right) * c_{y17} * c_{w2} - c_{w2} * \left(r - c_{y18}\right)}{c_{w1} * c_{y17} * c_{w2} - c_{w2} * c_{y16} * c_{w1}}$$

$$= \frac{c_{y17}}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w1}} * v - \frac{1}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w1}} * r + \frac{c_{y18} - \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * c_{y17}}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w1}}$$

$$e^{\mu_2 * t} = \frac{D_{e^{\mu_2 * t}}}{D} = \frac{c_{w1} * \left(r - c_{y18}\right) - c_{y16} * c_{w1} * \left(v - \frac{c_{y15}}{c_{y14}}\right)}{c_{w1} * c_{y17} * c_{w2} - c_{w2} * c_{y16} * c_{w1}}$$

$$= -\frac{c_{y16}}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w2}} * v + \frac{1}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w2}} * r + \frac{c_{y16} * \frac{c_{y15}}{c_{y14}} - c_{y18}}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w2}}$$

Βήμα 4ο (απαλοιφή χρόνου)

Αρχικά απλοποιώ τις χρονικές εξισώσεις με την βοήθεια σταθερών τιμών

$$c_{y19} = \frac{c_{y17}}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w1}}$$

$$c_{y20} = \frac{1}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w1}}$$

$$c_{y21} = \frac{c_{y18} - \frac{c_{y15}}{c_{y14}} * c_{y17}}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w1}}$$

$$c_{y22} = \frac{c_{y16}}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w2}}$$

$$c_{y23} = \frac{1}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w2}}$$

$$c_{y24} = \frac{c_{y16} * \frac{c_{y15}}{c_{y14}} - c_{y18}}{\left(c_{y17} - c_{y16}\right) * c_{w2}}$$

Οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$\begin{cases} e^{\mu_1 * t} = c_{y19} * v - c_{y20} * r + c_{y21} \\ e^{\mu_2 * t} = -c_{y22} * v + c_{y23} * r + c_{y24} \end{cases}$$

Αρχικά λογαριθμίζουμε τις δύο εξισώσεις

$$\begin{cases} \mu_1 * t = \ln\left(c_{y19} * v - c_{y20} * r + c_{y21}\right) \\ \mu_2 * t = \ln\left(-c_{y22} * v + c_{y23} * r + c_{y24}\right) \end{cases}$$

Στην σύνεχεια διαιρούμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και εκτελούμε πράξεις

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\ln\left(c_{y19} * v - c_{y20} * r + c_{y21}\right)}{\ln\left(-c_{y22} * v + c_{y23} * r + c_{y24}\right)}$$

$$\rightarrow \mu_1 * \ln\left(-c_{y22} * v + c_{y23} * r + c_{y24}\right) = \mu_2 * \ln\left(c_{y19} * v - c_{y20} * r + c_{y21}\right)$$

$$\rightarrow \ln\left(-c_{y22} * v + c_{y23} * r + c_{y24}\right)^{\mu_1} = \ln\left(c_{y19} * v - c_{y20} * r + c_{y21}\right)^{\mu_2}$$

$$\rightarrow \left(-c_{y22} * v + c_{y23} * r + c_{y24}\right)^{\mu_1} = \left(c_{y19} * v - c_{y20} * r + c_{y21}\right)^{\mu_2}$$

2.6 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ACKERMANN

2.6.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητές την γωνία ολίσθησης και την γωνία Ackermann

Η γωνία ολίσθησης β και η γωνία Ackermann υπολογίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{v}{u} \\ A = \left(\alpha_1 + \alpha_2\right) * \rho = \left(\alpha_1 + \alpha_2\right) * \dfrac{r}{u} \end{cases}$$

Με δεδομένη σταθερή εμπρός ταχύτητα u=c προκύπτει

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{v}{c} \\ A = (\alpha_1 + \alpha_2) * \dfrac{r}{c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = \beta * c \\ r = A * \dfrac{c}{\alpha_1 + \alpha_2} \end{cases}$$

Παραγωγίζουμε τις δύο εξισώσεις άρα προκύπτει

$$\begin{cases} \dot{v} = \dot{\beta} * c \\ \dot{r} = \dot{A} * \dfrac{c}{\alpha_1 + \alpha_2} \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητές τα v,r άρα προκύπτει

$$\begin{cases} \dot{v} = -c_{y7} * v - c_{y8} * r + c_{y9} \\ \dot{r} = c_{y10} * v + c_{y11} * r + c_{y12} \end{cases} \xrightarrow[\dot{v} = \dot{\beta} * c, \dot{r} = \dot{A} * \frac{c}{\alpha_1 + \alpha_2}]{v = \beta * c, r = A * \frac{c}{\alpha_1 + \alpha_2}} \begin{cases} \dot{\beta} * c = -c_{y7} * \beta * c - c_{y8} * A * \dfrac{c}{\alpha_1 + \alpha_2} + c_{y9} \\ \dot{A} * \dfrac{c}{\alpha_1 + \alpha_2} = c_{y10} * \beta * c + c_{y11} * A * \dfrac{c}{\alpha_1 + \alpha_2} + c_{y12} \end{cases}$$

Εκτελούμε πράξεις άρα προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητές τα β,A

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -c_{y7} * \beta - \dfrac{c_{y8}}{\alpha_1 + \alpha_2} * A + \dfrac{c_{y9}}{c} \\ \dot{A} = (\alpha_1 + \alpha_2) * c_{y10} * \beta + c_{y11} * A + \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2) * c_{y12}}{c} \end{cases}$$

2.6.2 Σχέση πλευρικής γωνία ολίσθησης και γωνίας Ackermann συναρτήσει του χρόνου

Μετατρέπουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων με την βοήθεια πινάκων στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{y7} & -\dfrac{c_{y8}}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ (\alpha_1 + \alpha_2) * c_{y10} & c_{y11} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta \\ A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{c_{y9}}{c} \\ \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2) * c_{y12}}{c} \end{bmatrix}$$

Προς διευκόλυνση των πράξεων που θα ακολουθήσουν κάνουμε τις ακόλουθες αντικαταστάσεις

$$w = \begin{bmatrix} \beta \\ A \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -c_{y7} & -\dfrac{c_{y8}}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ (\alpha_1 + \alpha_2) * c_{y10} & c_{y11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{N} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_{y9}}{c} \\ \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2) * c_{y12}}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{bmatrix}$$

$$\dot{w} = M * w + \mathrm{N}$$

Στην συνέχεια ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

<u>Βήμα 1ο (υπολογισμός ορίζουσας πίνακα X= M-λ*I και τιμών λ_1,λ_2)</u>

$$X = M - \lambda * \mathrm{I} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} - \lambda * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$|X| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (m_{11} - \lambda) * (m_{22} - \lambda) - m_{12} * m_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (m_{11} + m_{22}) * \lambda + m_{11} * m_{22} - m_{12} * m_{21} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{(m_{11} + m_{22}) \pm \sqrt{(m_{11} + m_{22})^2 - 4 * (m_{11} * m_{22} - m_{12} * m_{21})}}{2}$$

Προς διευκόλυνση των πράξεων κάνουμε τις ακόλουθες αντικαταστάσεις

$$x_1 = m_{11} + m_{22}$$
$$x_2 = \sqrt{(m_{11} + m_{22})^2 - 4 * (m_{11} * m_{22} - m_{12} * m_{21})}$$

Και παίρνουμε τις τιμές των λ_1,λ_2

$$\lambda = \frac{x_1 \pm x_2}{2} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2} \end{cases}$$

Βήμα 2ο (προσδιορισμός ιδιοτιμών)

$$(M-\lambda_1 * \mathrm{I}) * \varphi = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} m_{11}-\lambda_1 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}-\lambda_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} (m_{11}-\lambda_1) * \varphi_{11} + m_{12} * \varphi_{21} = 0 \\ m_{21} * \varphi_{11} + (m_{22}-\lambda_1) * \varphi_{21} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi_{11} = -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} * \varphi_{21} \\ \varphi_{11} = -\dfrac{m_{22}-\lambda_1}{m_{21}} * \varphi_{21} \end{cases}$$

$$\rightarrow \varphi_{11} = -\frac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} * \varphi_{21} \xrightarrow{\varphi_{21}=c} \varphi_{11} = -\frac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} * c$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} * c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} \\ 1 \end{bmatrix} * c \rightarrow \frac{\varphi}{c} = \begin{bmatrix} -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(M-\lambda_2 * \mathrm{I}) * \theta = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} m_{11}-\lambda_2 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}-\lambda_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} (m_{11}-\lambda_2) * \theta_{11} + m_{12} * \theta_{21} = 0 \\ m_{21} * \theta_{11} + (m_{22}-\lambda_2) * \theta_{21} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta_{11} = -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2} * \theta_{21} \\ \theta_{11} = -\dfrac{m_{22}-\lambda_2}{m_{21}} * \theta_{21} \end{cases}$$

$$\rightarrow \theta_{11} = -\frac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2} * \theta_{21} \xrightarrow{\theta_{21}=c'} \theta_{11} = -\frac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2} * c'$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} * c' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2} \\ 1 \end{bmatrix} * c' \rightarrow \frac{\theta}{c'} = \begin{bmatrix} -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 3ο (τελική μορφή εξισώσεων)

$$w = c_{x1} * e^{\lambda_1 * t} * \frac{\varphi}{c} + c_{x2} * e^{\lambda_2 * t} * \frac{\theta}{c'} + N \rightarrow \begin{bmatrix} \beta \\ A \end{bmatrix} = c_{x1} * e^{\lambda_1 * t} * \begin{bmatrix} -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} \\ 1 \end{bmatrix} + c_{x2} * e^{\lambda_2 * t} * \begin{bmatrix} -\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta\\ A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1}*c_{x1}*e^{\lambda_1*t}\\ 1*c_{x1}*e^{\lambda_1*t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2}*c_{x2}*e^{\lambda_2*t}\\ 1*c_{x2}*e^{\lambda_2*t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n_{11}\\ n_{21}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta\\ A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1}*c_{x1}*e^{\lambda_1*t}-\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2}*c_{x2}*e^{\lambda_2*t}+n_{11}\\ 1*c_{x1}*e^{\lambda_1*t}+1*c_{x2}*e^{\lambda_2*t}+n_{21}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\beta=-\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1}*c_{x1}*e^{\lambda_1*t}-\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2}*c_{x2}*e^{\lambda_2*t}+n_{11}\\ A=c_{x1}*e^{\lambda_1*t}+c_{x2}*e^{\lambda_2*t}+n_{21}\end{cases}$$

<u>Βήμα 4ο (υπολογισμός σταθερών c_{x1}, c_{x2})</u>

Την χρονική στιγμή t=0 με $\beta=\beta_0$ και $A=A_0$ προκύπτει

$$\begin{cases}\beta_0=-\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1}*c_{x1}-\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2}*c_{x2}+n_{11}\\ A_0=c_{x1}+c_{x2}+n_{21}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1}*c_{x1}+\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2}*c_{x2}=n_{11}-\beta_0\\ c_{x1}+c_{x2}=A_0-n_{21}\end{cases}$$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες για το σύστημα που προέκυψε και μετά υπολογίζουμε τις τιμές των σταθερών c_{x1}, c_{x2}

$$D=\begin{vmatrix}\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} & \dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2}\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1}-\frac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2}$$

$$D_{c_{x1}}=\begin{vmatrix}n_{11}-\beta_0 & \dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2}\\ A_0-n_{21} & 1\end{vmatrix}=n_{11}-\beta_0-(A_0-n_{21})*\frac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_2}$$

$$D_{c_{x2}}=\begin{vmatrix}\dfrac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1} & n_{11}-\beta_0\\ 1 & A_0-n_{21}\end{vmatrix}=(A_0-n_{21})*\frac{m_{12}}{m_{11}-\lambda_1}-n_{11}+\beta_0$$

$$c_{x1} = \frac{D_{c_{x1}}}{D} = \frac{n_{11} - \beta_0 - (A_0 - n_{21}) * \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2}}{\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2}}$$

$$c_{x1} = \frac{D_{c_{x1}}}{D} = \frac{(A_0 - n_{21}) * \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} - n_{11} + \beta_0}{\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2}}$$

2.6.3 Σχέση μεταξύ γωνίας ολίσθησης και γωνία Ackermann (απαλοιφή χρόνου)

Εφαρμόζουμε τα βήματα που ακολουθήσαμε στην ενότητα 2.5

$$\begin{cases} \beta = -\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} * c_{x1} * e^{\lambda_1 * t} - \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2} * c_{x2} * e^{\lambda_2 * t} + n_{11} \\ A = c_{x1} * e^{\lambda_1 * t} + c_{x2} * e^{\lambda_2 * t} + n_{21} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} * c_{x1} * e^{\lambda_1 * t} + \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2} * c_{x2} * e^{\lambda_2 * t} = -\beta + n_{11} \\ c_{x1} * e^{\lambda_1 * t} + c_{x2} * e^{\lambda_2 * t} = -A + n_{21} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} * c_{x1} & \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2} * c_{x2} \\ c_{x1} & c_{x2} \end{vmatrix} = c_{x1} * c_{x2} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)$$

$$D_{e^{\lambda_1 * t}} = \begin{vmatrix} -\beta + n_{11} & \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2} * c_{x2} \\ -A + n_{21} & c_{x2} \end{vmatrix} = c_{x2} * \left(-\beta + n_{11} - \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2} * (-A + n_{21}) \right)$$

$$D_{e^{\lambda_2 * t}} = \begin{vmatrix} \frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} * c_{x1} & -\beta + n_{11} \\ c_{x1} & -A + n_{21} \end{vmatrix} = c_{x1} * \left(\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} * (-A + n_{21}) + \beta - n_{11} \right)$$

$$e^{\lambda_1 * t} = \frac{D_{e^{\lambda_1 * t}}}{D} = -\frac{1}{c_{x1} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)} * \beta + \frac{\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2}}{c_{x1} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)} * A + \frac{-\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2} * n_{21} + n_{11}}{c_{x1} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)}$$

$$e^{\lambda_2 * t} = \frac{D_{e^{\lambda_2 * t}}}{D} = \frac{1}{c_{x2} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)} * \beta - \frac{\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1}}{c_{x2} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)} * A + \frac{\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} * n_{21} - n_{11}}{c_{x2} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)}$$

$$c_{x3} = \frac{1}{c_{x1} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)}$$

$$c_{x4} = \frac{\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2}}{c_{x1} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)}$$

$$c_{x5} = \frac{-\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_2} * n_{21} + n_{11}}{c_{x1} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)}$$

$$c_{x6} = \frac{1}{c_{x2} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)}$$

$$c_{x7} = \frac{\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1}}{c_{x2} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)}$$

$$c_{x8} = \frac{\frac{m_{12}}{m_{11} - \lambda_1} * n_{21} - n_{11}}{c_{x2} * m_{12} * \left(\frac{1}{m_{11} - \lambda_1} - \frac{1}{m_{11} - \lambda_2} \right)}$$

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 * t} = -c_{x3} * \beta + c_{x4} * A + c_{x5} \\ e^{\lambda_2 * t} = c_{x6} * \beta - c_{x7} * A + c_{x8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 * t = \ln\left(-c_{x3} * \beta + c_{x4} * A + c_{x5}\right) \\ \lambda_2 * t = \ln\left(c_{x6} * \beta - c_{x7} * A + c_{x8}\right) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(\div)} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\ln\left(-c_{x3} * \beta + c_{x4} * A + c_{x5}\right)}{\ln\left(c_{x6} * \beta - c_{x7} * A + c_{x8}\right)}$$

$$\rightarrow \lambda_1 * \ln\left(c_{x6} * \beta - c_{x7} * A + c_{x8}\right) = \lambda_2 * \ln\left(-c_{x3} * \beta + c_{x4} * A + c_{x5}\right)$$

$$\rightarrow \ln\left(c_{x6} * \beta - c_{x7} * A + c_{x8}\right)^{\lambda_1} = \ln\left(-c_{x3} * \beta + c_{x4} * A + c_{x5}\right)^{\lambda_2}$$

$$\rightarrow \left(c_{x6} * \beta - c_{x7} * A + c_{x8}\right)^{\lambda_1} = \left(-c_{x3} * \beta + c_{x4} * A + c_{x5}\right)^{\lambda_2}$$

2.7 ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΓΩΝΙΑΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

Για να προσδιορίσουμε την μέγιστη τιμή της γωνίας ολίσθησης β εφαρμόζουμε τα ακόλουθα βήματα

Βήμα 1ο

Μηδενίζουμε τον ρυθμό μεταβολής της πλευρικής ταχύτητας v (εξίσωση 2.2.28) και προσδιορίζουμε την χρονική στιγμή t_1

$$\dot{v} = c_{w1} * \mu_1 * e^{\mu_1 * t} + c_{w2} * \mu_2 * e^{\mu_2 * t} \xrightarrow[t=t_1]{\dot{v}=0} c_{w1} * \mu_1 * e^{\mu_1 * t_1} + c_{w2} * \mu_2 * e^{\mu_2 * t_1} = 0$$

$$\rightarrow c_{w1} * \mu_1 * e^{\mu_1 * t_1} = -c_{w2} * \mu_2 * e^{\mu_2 * t_1} \rightarrow \frac{e^{\mu_1 * t_1}}{e^{\mu_2 * t_1}} = \frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1}$$

$$\rightarrow e^{\mu_1 * t_1 - \mu_2 * t_1} = \frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1} \rightarrow e^{(\mu_1 - \mu_2) * t_1} = \frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1}$$

$$\rightarrow e^{(\mu_1 - \mu_2) * t_1} = \frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1} \rightarrow (\mu_1 - \mu_2) * t_1 = \ln\left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1}\right) \rightarrow t_1 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} * \ln\left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1}\right)$$

$$\rightarrow t_1 = \ln\left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}}$$

Βήμα 2ο

Αντικαθιστούμε την χρονική στιγμή t_1 στην εξίσωση 2.2.27 και προκύπτει η μέγιστη τιμή της πλευρικής ταχύτητας v

$$v_{max} = c_{w1} * e^{\mu_1 * t_1} + c_{w2} * e^{\mu_2 * t_1} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}} = c_{w1} * e^{\mu_1 * \ln\left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}}} + c_{w2} * e^{\mu_2 * \ln\left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}}} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}}$$

$$= c_{w1} * e^{\ln\left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1}\right)^{\mu_1 * \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}}} + c_{w2} * e^{\ln\left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1}\right)^{\mu_2 * \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}}} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}}$$

$\rightarrow v_{max} = c_{w1} * \left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1} \right)^{\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}} + c_{w2} * \left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1} \right)^{\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}} + \frac{c_{y15}}{c_{y14}}$	

Βήμα 3ο

Την τιμή v_{max} που προέκυψε αντικαθιστούμε στην εξίσωση 2.3.4 με ταχύτητα u=c

$\beta = \frac{v}{u} \rightarrow \beta_{max} = \frac{v_{max}}{c} \rightarrow \beta_{max} = \frac{c_{w1}}{c} * \left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1} \right)^{\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}} + \frac{c_{w2}}{c} * \left(\frac{-c_{w2} * \mu_2}{c_{w1} * \mu_1} \right)^{\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}} + \frac{c_{y15}}{c * c_{y14}}$	

Οπότε προκύπτει η μέγιστη τιμή της γωνίας ολίσθησης β

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 :ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

3.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ (μέθοδος Crank-Nicolson)

Για τον προσδιορισμό των μεγεθών v,r στο γραμμικό μοντέλο οχήματος ενός ίχνους χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες 7 εξισώσεις

$$Y_1 + Y_2 = m * \alpha_y \quad (1)$$
$$Y_1 * \alpha_1 - Y_2 * \alpha_2 = J_z * \dot{r} \quad (2)$$
$$\alpha_y = \dot{v} + u * r \quad (3)$$
$$a_1 = \tau_1 * \delta_v - \frac{v + r * \alpha_1}{u} \quad (4)$$
$$a_2 = \chi * \tau_1 * \delta_v - \frac{v - r * \alpha_2}{u} \quad (5)$$
$$Y_1 = C_1 * a_1 \quad (6)$$
$$Y_2 = C_2 * a_2 \quad (7)$$

Αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (1),(2) με τις (6),(7) προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$(1),(2) \xrightarrow[(7)]{(6)} \begin{cases} C_1 * a_1 + C_2 * a_2 = m * \alpha_y \\ C_1 * a_1 * \alpha_1 - C_2 * a_2 * \alpha_2 = J_z * \dot{r} \end{cases}$$

Στην συνέχεια αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (3),(4) και (5)

$$\begin{cases} C_1 * \left(\tau_1 * \delta_v - \frac{v + r * \alpha_1}{u} \right) + C_2 * \left(\chi * \tau_1 * \delta_v - \frac{v - r * \alpha_2}{u} \right) = m * (\dot{v} + u * r) \\ C_1 * \left(\tau_1 * \delta_v - \frac{v + r * \alpha_1}{u} \right) * \alpha_1 - C_2 * \left(\chi * \tau_1 * \delta_v - \frac{v - r * \alpha_2}{u} \right) * \alpha_2 = J_z * \dot{r} \end{cases}$$

και εκτελούμε πράξεις

$$\begin{cases} C_1 * \tau_1 * \delta_v - C_1 * \frac{v + r * \alpha_1}{u} + C_2 * \chi * \tau_1 * \delta_v - C_2 * \frac{v - r * \alpha_2}{u} = m * \dot{v} + m * u * r \\ C_1 * \tau_1 * \delta_v * \alpha_1 - C_1 * \frac{v + r * \alpha_1}{u} * \alpha_1 - C_2 * \chi * \tau_1 * \delta_v * \alpha_2 + C_2 * \frac{v - r * \alpha_2}{u} * \alpha_2 = J_z * \dot{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m*\dot{v} = C_1*\tau_1*\delta_v - C_1*\dfrac{v+r*\alpha_1}{u} + C_2*\chi*\tau_1*\delta_v - C_2*\dfrac{v-r*\alpha_2}{u} - m*u*r \\ J_z*\dot{r} = C_1*\tau_1*\delta_v*\alpha_1 - C_1*\dfrac{v+r*\alpha_1}{u}*\alpha_1 - C_2*\chi*\tau_1*\delta_v*\alpha_2 + C_2*\dfrac{v-r*\alpha_2}{u}*\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m*\dot{v} = -C_1*\dfrac{v+r*\alpha_1}{u} - C_2*\dfrac{v-r*\alpha_2}{u} - m*u*r + C_1*\tau_1*\delta_v + C_2*\chi*\tau_1*\delta_v \\ J_z*\dot{r} = -C_1*\dfrac{v+r*\alpha_1}{u}*\alpha_1 + C_2*\dfrac{v-r*\alpha_2}{u}*\alpha_2 - C_2*\chi*\tau_1*\delta_v*\alpha_2 + C_1*\tau_1*\delta_v*\alpha_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m*\dot{v} = -C_1*\dfrac{v}{u} - C_1*\dfrac{r*\alpha_1}{u} - C_2*\dfrac{v}{u} - C_2*\dfrac{-r*\alpha_2}{u} - m*u*r + C_1*\tau_1*\delta_v + C_2*\chi*\tau_1*\delta_v \\ J_z*\dot{r} = -C_1*\dfrac{v}{u}*\alpha_1 - C_1*\dfrac{r*\alpha_1}{u}*\alpha_1 + C_2*\dfrac{v}{u}*\alpha_2 + C_2*\dfrac{-r*\alpha_2}{u}*\alpha_2 - C_2*\chi*\tau_1*\delta_v*\alpha_2 + C_1*\tau_1*\delta_v*\alpha_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m*\dot{v} = -C_1*\dfrac{v}{u} - C_2*\dfrac{v}{u} - C_1*\dfrac{r*\alpha_1}{u} - C_2*\dfrac{-r*\alpha_2}{u} - m*u*r + C_1*\tau_1*\delta_v + C_2*\chi*\tau_1*\delta_v \\ J_z*\dot{r} = -C_1*\dfrac{v}{u}*\alpha_1 + C_2*\dfrac{v}{u}*\alpha_2 - C_1*\dfrac{r*\alpha_1}{u}*\alpha_1 + C_2*\dfrac{-r*\alpha_2}{u}*\alpha_2 - C_2*\chi*\tau_1*\delta_v*\alpha_2 + C_1*\tau_1*\delta_v*\alpha_1 \end{cases}$$

Και προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \dot{v} = -\dfrac{C_1+C_2}{m*u}*v - \left(\dfrac{C_1*\alpha_1 - C_2*\alpha_2}{m*u} + u\right)*r + \dfrac{C_1+C_2*\chi}{m}*\delta_v*\tau_1 \\ \dot{r} = -\dfrac{C_1*\alpha_1 - C_2*\alpha_2}{J_z*u}*v - \dfrac{C_1*\alpha_1^2 + C_2*\alpha_2^2}{J_z*u}*r + \dfrac{C_1*\alpha_1 - C_2*\chi*\alpha_2}{J_z}*\delta_v*\tau_1 \end{cases}$$

Μετατρέπουμε το σύστημα με την βοήθεια πινάκων στην ακόλουθη μορφή

$$\dot{w} = A * w + \delta_v * b \quad (8)$$

$$w = \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} \rightarrow \dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix}$$

$$A = -\begin{bmatrix} \dfrac{C_1 + C_2}{m * u} & \dfrac{C_1 * \alpha_1 - C_2 * \alpha_2}{m * u} + u \\ \dfrac{C_1 * \alpha_1 - C_2 * \alpha_2}{J_z * u} & \dfrac{C_1 * \alpha_1^2 + C_2 * \alpha_2^2}{J_z * u} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \dfrac{C_1 + C_2}{m} \\ \dfrac{C_1 * \alpha_1 - \chi * C_2 * \alpha_2}{J_z} \end{bmatrix} * \tau_1$$

Για να προσεγγίσουμε με αριθμητική ανάλυση την διαφορική εξίσωση (8) χρησιμοποιούμε την μέθοδο Crank-Nicolson. Αρχικά θέτουμε θ€[0,1] και $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ με σταθερό χρονικό βήμα.

Με δεδομένη την προσέγγιση w^n της w(t)=w με χρονικό βήμα n, η επόμενη τιμή χρονικού βήματος w^{n+1} θα υπολογιστεί λύνοντας το ακόλουθο γραμμικό σύστημα με αρχικές συνθήκες στο 0.

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} + (1-\theta) * A^n * w^n + \theta * A^{n+1} * w^{n+1} = (1-\theta) * \delta_v * b^n + \theta * \delta_v * b^{n+1} \quad (9)$$

$$w^1 \approx w(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ r(0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Επιλύουμε την εξίσωση (9)

$$w^{n+1} - w^n + (1-\theta) * \Delta t * A^n * w^n + \theta * \Delta t * A^{n+1} * w^{n+1} = (1-\theta) * \Delta t * \delta_v * b^n + \theta * \Delta t * \delta_v * b^{n+1}$$

$$\rightarrow \left(1 + \theta * \Delta t * A^{n+1}\right) * w^{n+1} - \left(1 - (1-\theta) * \Delta t * A^n\right) * w^n = (1-\theta) * \Delta t * \delta_v * b^n + \theta * \Delta t * \delta_v * b^{n+1}$$

άρα προκύπτει η τελική μορφή της

$$\left(1 + \theta * \Delta t * A^{n+1}\right) * w^{n+1} = \left(1 - (1-\theta) * \Delta t * A^n\right) * w^n + (1-\theta) * \Delta t * \delta_v * b^n + \theta * \Delta t * \delta_v * b^{n+1} \quad (11)$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες εξισώσεις για να προσδιορίσουμε την γωνία εκτροπής, τις συντεταγμένες u_0 και v_0 της ταχύτητας του οχήματος και τις συντεταγμένες x_0 και y_0 της τροχιάς του οχήματος.

$$\psi(t^{n+1}) = \psi(t^n) + \frac{1}{2}\left(r(t^n) + r(t^{n+1})\right) * \Delta t$$

$$\begin{cases} u_0(t^n) = -v(t^n) * \sin(\psi(t^n)) + c * \cos(\psi(t^n)) \\ v_0(t^n) = c * \sin(\psi(t^n)) + v(t^n) * \cos(\psi(t^n)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0(t^{n+1}) = x_0(t^n) + \frac{1}{2}\left(u_0(t^n) + u_0(t^{n+1})\right) * \Delta t \\ y_0(t^{n+1}) = y_0(t^n) + \frac{1}{2}\left(u_0(t^n) + u_0(t^{n+1})\right) * \Delta t \end{cases}$$

3.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

3.2.1 Μέθοδος Explicit Forward

Για τον προσδιορισμό των μεγεθών v,r στο μη γραμμικό μοντέλο οχήματος ενός ίχνους χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες 7 εξισώσεις

$$\dot{v} = \frac{Y_1(\alpha_1) + Y_2(\alpha_2)}{m} - u * r = G_1(v, r, t) \quad (1)$$

$$\dot{r} = \frac{Y_1(\alpha_1) * a_1 + Y_2(\alpha_2) * a_2}{J_z} = G_2(v, r, t) \quad (2)$$

$$\alpha_1 = \delta_v * \tau_1 - \frac{v + r * a_1}{u} \quad (3)$$

$$\alpha_2 = \delta_v * \chi * \tau_1 - \frac{v - r * a_2}{u} \quad (4)$$

$$Y(\alpha) = -C_1 * \alpha^2 + C_2 * \alpha \quad (5)$$

$$Y_1(\alpha_1) \approx 2 * Y(\alpha_1) \quad (6)$$

$$Y_2(\alpha_2) \approx 2 * Y(\alpha_2) \quad (7)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\begin{cases} \dot{v} + u * r = \frac{Y_1(\alpha_1) + Y_2(\alpha_2)}{m} \\ \dot{r} = \frac{Y_1(\alpha_1) * a_1 + Y_2(\alpha_2) * a_2}{J_z} \end{cases}$$

Μετατρέπουμε το σύστημα με την βοήθεια πινάκων στην ακόλουθη μορφή

$$\dot{w} + B * w = z \quad (8)$$

$$w = \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_1(\alpha_1) + Y_2(\alpha_2)}{m} \\ \dfrac{Y_1(\alpha_1) * a_1 + Y_2(\alpha_2) * a_2}{J_z} \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο Crank-Nicolson όπως και στο γραμμικό μοντέλο με θ=0 και προκύπτει το ακόλουθο σύστημα με αρχικές συνθήκες στο 0.

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} + B\left(w^n\right) * w^n = z\left(w^n\right) \quad (9)$$

$$w^1 \approx w(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ r(0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Επιλύουμε την εξίσωση (9)

$$w^{n+1} - w^n + B\left(w^n\right) * w^n * \Delta t = z\left(w^n\right) * \Delta t \rightarrow w^{n+1} - \left(1 - B\left(w^n\right) * \Delta t\right) * w^n = z\left(w^n\right) * \Delta t$$

άρα προκύπτει η τελική μορφή της

$$w^{n+1} = \left(1 - B\left(w^n\right) * \Delta t\right) * w^n + z\left(w^n\right) * \Delta t \quad (11)$$

3.2.2 Μέθοδος Runge-Kutta 4th Order

Για τον προσδιορισμό των μεγεθών v,r στο μη γραμμικό μοντέλο οχήματος ενός ίχνους χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες 2 εξισώσεις

$$\dot{v} = \frac{Y_1(\alpha_1) + Y_2(\alpha_2)}{m} - u * r = G_1(v, r, t) \quad (1)$$

$$\dot{r} = \frac{Y_1(\alpha_1) * a_1 + Y_2(\alpha_2) * a_2}{J_z} = G_2(v, r, t) \quad (2)$$

Μετατρέπουμε το σύστημα με την βοήθεια πινάκων στην ακόλουθη μορφή

$$G(v, r, t) = \begin{bmatrix} G_1(v, r, t) \\ G_2(v, r, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(w, t) \\ G_2(w, t) \end{bmatrix} = G(w, t)$$

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης και προκύπτει το σύστημα με αρχικές συνθήκες στο 0.

$w^1 \approx w(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ r(0) \end{bmatrix}$	

$k_1 = G(v^n, r^n, t^n) = G(w^n, t^n)$ $k_2 = G\left(\left(w^n + \frac{1}{2} * \Delta t * k_1\right), \left(t^n + \frac{1}{2} * \Delta t\right)\right)$ $k_3 = G\left(\left(w^n + \frac{1}{2} * \Delta t * k_2\right), \left(t^n + \frac{1}{2} * \Delta t\right)\right)$ $k_4 = G\left(\left(w^n + \Delta t * k_3\right), \left(t^n + \Delta t\right)\right)$	

ενώ η τελική μορφή της εξίσωσης είναι η ακόλουθη

$w^{n+1} = w^n + \frac{\Delta t}{6} * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)$	

3.3 ΒΗΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ CRANK-NICOLSON ΠΟΥ ΕΦΑΡΜΟΣΤΗΚΕ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

Βήμα 1ο

Εισάγουμε τιμές για τα σταθερά μεγέθη $C_1, C_2, m, J_z, \alpha_1, \alpha_2, \tau_1$

Βήμα 2ο

Εισάγουμε τιμές για τα εξαρτώμενα από τον χρόνο μεγέθη $\delta_u(t)$, $u(t)$

Βήμα 3ο

Σε βήμα 1 (n=1) και t=0 υπολογίζουμε τις αρχικές συνθήκες $w(0)$

Βήμα 4ο

Επιλέγουμε για την παράμετρο θ την τιμή 0,5 (μέθοδος Crank-Nicolson) άρα $\theta=0,5$

Βήμα 5ο

Επιλέγουμε το σταθερό χρονικό βήμα $\Delta t = t^{n+1} - t^n$

Βήμα 6ο

Δίνουμε τιμές στο n και υπολογίζουμε τις τιμές των t^n οπότε προκύπτουν οι τιμές των t^{n+1} με την βοήθεια της εξίσωσης (11).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 :ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

4.1 ΠΛΕΥΡΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΡΥΘΜΟΣ ΕΚΤΡΟΠΗΣ-ΓΩΝΙΑ ΕΚΤΡΟΠΗΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

Για να συγκρίνουμε τις αναλυτικές λύσεις με τις αριθμητικές προσεγγίσεις εισάγουμε τις ακόλουθες τιμές

l = 2,560m
M = 1500Kg
Κατανομή μάζας (εμπρός – πίσω): 43%, 57%
C_1 = 91673,247N/rad και C_2 = 74484,513N/rad
δ_u = 0,005rad
χ = 0
$\tau_1 = \tau_2$ = 0,548
N_x = 0
u = 35m/s

Από την κατανομή μάζας προκύπτει α_1 = 57%*2,56=1,4592m και α_2 = 43%*2,56=1,1008m
Η ροπή αδρανείας Jz≈1500*1,222*1,378=2575,583kg*m^2

Αρχικές συνθήκες t=0,v=0,r=0,ψ=0

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις ακόλουθες σταθερές τιμές

$c_{y1} = C_1 * \tau_1 * \delta_u$ $c_{y2} = C_1$ $c_{y3} = C_1 * \alpha_1$ $c_{y4} = C_2 * \tau_1 * \delta_u * \chi \xrightarrow{\chi=1 \to \chi=0} c_{y4} = 0$ $c_{y5} = C_2$ $c_{y6} = -C_2 * \alpha_2$	

$c_{y7} = \frac{c_{y2} + c_{y5}}{m * c}$ $c_{y8} = \frac{c_{y3} + c_{y6}}{m * c} + c$ $c_{y9} = \frac{c_{y1} + c_{y4}}{m}$ $c_{y10} = \frac{c_{y5} * a_2 - c_{y2} * a_1}{J_z * c}$ $c_{y11} = \frac{c_{y6} * a_2 - c_{y3} * a_1}{J_z * c}$ $c_{y12} = \frac{c_{y1} * a_1 - c_{y4} * a_2}{J_z}$	

$c_{y13} = -\left(c_{y11} - c_{y7}\right)$ $c_{y14} = -\left(c_{y11} * c_{y7} - c_{y8} * c_{y10}\right)$ $c_{y15} = -c_{y11} * c_{y9} - c_{y8} * c_{y12}$	

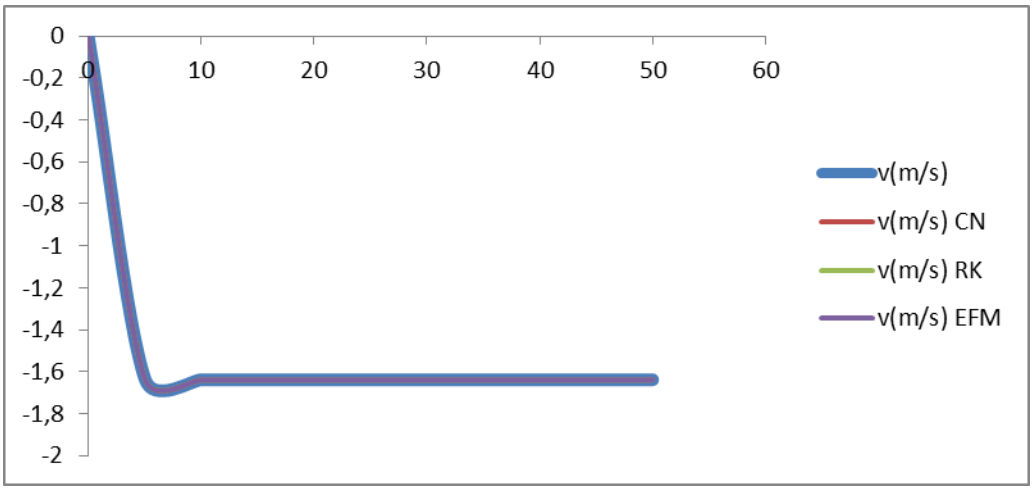
$\rightarrow \mu_{1,2} = \frac{-c_{y13} \pm \sqrt{c_{y13}^2 - 4 * c_{y14}}}{2}$	

$c_{y16} = -\frac{1}{c_{y8}} * \mu_1 - \frac{c_{y7}}{c_{y8}}$ $c_{y17} = -\frac{1}{c_{y8}} * \mu_2 - \frac{c_{y7}}{c_{y8}}$ $c_{y18} = -\frac{c_{y7}}{c_{y8}} * \frac{c_{y15}}{c_{y14}} + \frac{c_{y9}}{c_{y8}}$	

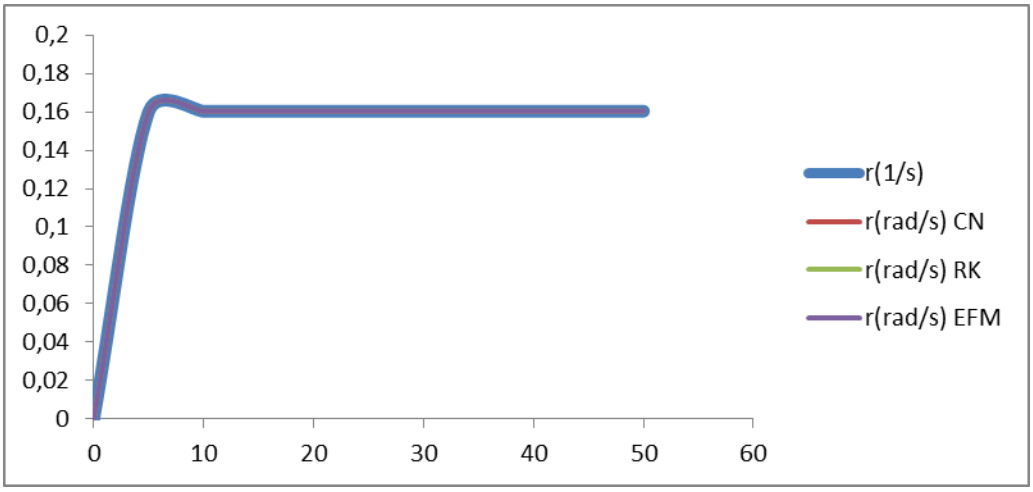
$c_{w1} = \frac{D_{c_{w1}}}{D} = \frac{\left(v_0 - \frac{c_{y15}}{c_{y14}}\right) * c_{y17} - \left(r_0 - c_{y18}\right)}{c_{y17} - c_{y16}}$ $c_{w2} = \frac{D_{c_{w2}}}{D} = \frac{\left(r_0 - c_{y18}\right) - \left(v_0 - \frac{c_{y15}}{c_{y14}}\right) * c_{y16}}{c_{y17} - c_{y16}}$	

Με την βοήθεια υπολογιστικού φύλλου αρχείου xls δίνουμε τιμές στην χρονική στιγμή t(0-50s με βήμα 0,01s) οπότε προκύπτουν ο ακόλουθοι πίνακες τιμών με μεταβλητές την πλευρική ταχύτητα v, τον ρυθμό εκτροπής r και την γωνία εκτροπής ψ.

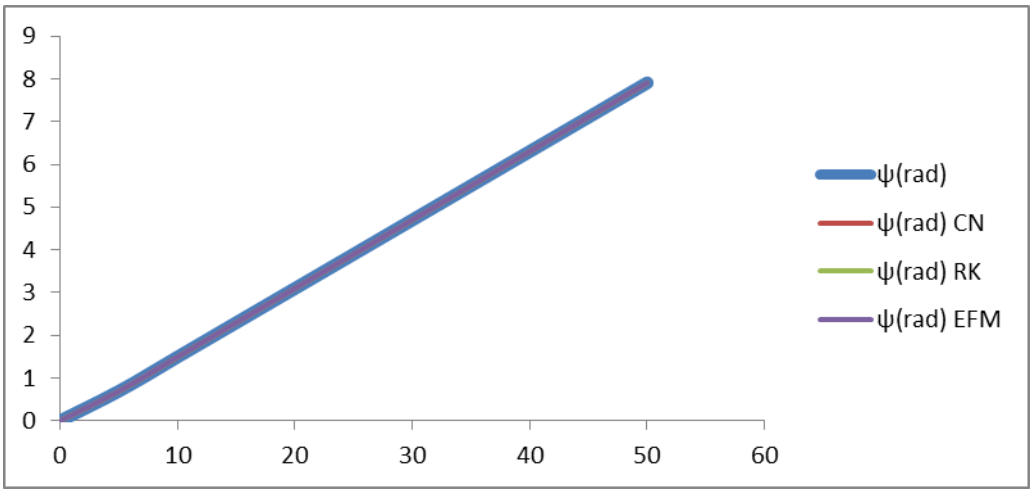
t(sec)	v(m/s)	v(m/s) CN	v(m/s) RK	v(m/s) EFM
0	0	0	0	0
5	-1,633204502	-1,632893138	-1,632892744	-1,633411316
10	-1,638192189	-1,638190783	-1,638190781	-1,638193016
15	-1,638203148	-1,638203143	-1,638203143	-1,63820315
20	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172
25	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172
30	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172
35	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172
40	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172
45	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172
50	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172	-1,638203172



t(sec)	r(1/s)	r(rad/s) CN	r(rad/s) RK	r(rad/s) EFM
0	0	0	0	0
5	0,160069977	0,160050986	0,160050964	0,160078083
10	0,160345145	0,160345063	0,160345063	0,160345184
15	0,16034575	0,16034575	0,16034575	0,16034575
20	0,160345751	0,160345751	0,160345751	0,160345751
25	0,160345751	0,160345751	0,160345751	0,160345751
30	0,160345751	0,160345751	0,160345751	0,160345751
35	0,160345751	0,160345751	0,160345751	0,160345751
40	0,160345751	0,160345751	0,160345751	0,160345751
45	0,160345751	0,160345751	0,160345751	0,160345751
50	0,160345751	0,160345751	0,160345751	0,160345751



t(sec)	ψ(rad)	ψ(rad) CN	ψ(rad) RK	ψ(rad) EFM
0	0	0	0	0
5	0,692576373	0,690991121	0,690988437	0,692723394
10	1,494080339	1,492477258	1,492474553	1,494235227
15	2,295808601	2,294205448	2,294202743	2,295963523
20	3,097537356	3,095934202	3,095931497	3,097692278
25	3,899266112	3,897662958	3,897660253	3,899421033
30	4,700994867	4,699391714	4,699389009	4,701149789
35	5,502723623	5,501120469	5,501117765	5,502878545
40	6,304452379	6,302849225	6,30284652	6,3046073
45	7,106181134	7,104577981	7,104575276	7,106336056
50	7,90790989	7,906306736	7,906304032	7,908064812



Μπλε γραμμή	**Αναλυτική μέθοδος**
Κόκκινη γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος Crank-Nicolson**
Πράσινη γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος 4th Order Runge-Kutta**
Μωβ γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος Explicit forward**

4.2 ΘΕΣΕΙΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ ΟΧΗΜΑΤΟΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ) ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

Αρχικά υπολογίζουμε τις ακόλουθες σταθερές τιμές

$$c_{\psi 1} = \psi_0 - \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1} - \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_2}$$

$$c_{\psi 2} = \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_1}$$

$$c_{\psi 3} = \frac{c_{y16} * c_{w1}}{\mu_2}$$

Με την βοήθεια υπολογιστικού φύλλου αρχείου xls προσεγγίζουμε την εκθετική συνάρτηση σε γραμμική

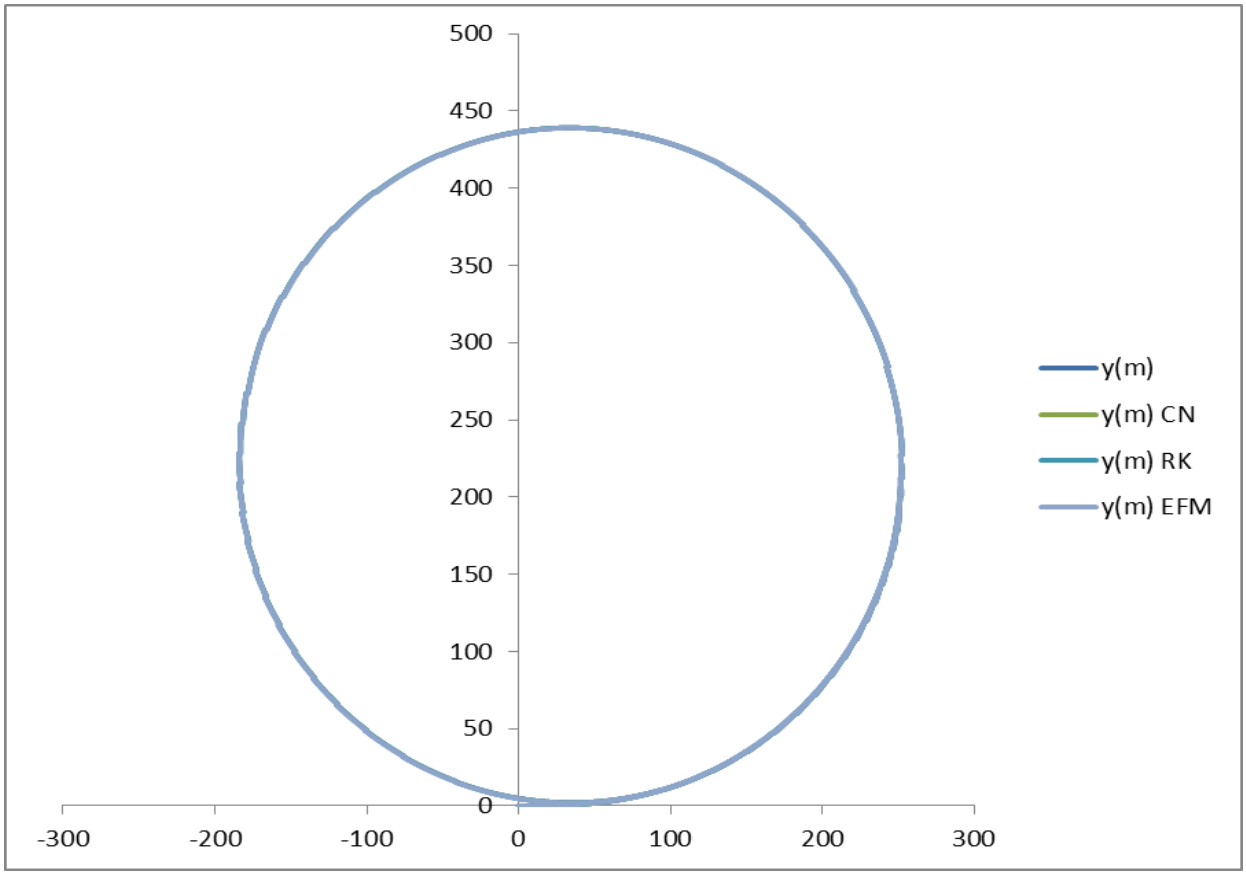
$$\psi = c_{\psi 1} + c_{y18} * t + c_{\psi 2} * e^{\mu_1 * t} + c_{\psi 3} * e^{\mu_2 * t} \approx -C_{01} + C_{02} * t$$

Με την βοήθεια του Ολοκληρωτικού λογισμού υπολογίζουμε τις θέσεις (x_0,y_0) χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\begin{cases} x_0 = \int (u * \cos\psi - v * \sin\psi)\, dt + x_0(0) \\ y_0 = \int (u * \sin\psi + v * \cos\psi)\, dt + y_0(0) \end{cases}$$

Με την βοήθεια υπολογιστικού φύλλου αρχείου xls δίνουμε τιμές στην χρονική στιγμή t (0-50s με βήμα 0,01s) οπότε προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας τιμών με μεταβλητές την θέση x_0 και την θέση y_0 με την αναλυτική σε σχέση με τις αριθμητικές μεθόδους.

t(sec)	x(m)	y(m)	x(m) CN	y(m) CN	x(m) RK	y(m) RK	x(m) EFM	y(m) EFM
0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	165,3875	45,81835	165,395	45,81835	165,3951	45,81799	165,3286	45,98009
10	250,517	193,3144	251,0034	193,3144	251,0039	193,3138	250,6785	193,6255
15	204,0241	357,4077	204,5677	357,4077	204,5686	357,4073	203,9544	357,637
20	53,69193	438,1622	54,36238	438,1622	54,36355	438,1622	53,60735	438,1272
25	-108,66	386,3928	-108,127	386,3928	-108,126	386,3931	-108,791	386,0722
30	-183,22	233,6305	-183,933	233,6305	-183,933	233,6311	-184,329	233,1769
35	-126,313	72,91825	-126,885	72,91825	-126,885	72,91868	-126,998	72,56519
40	29,03682	2,140799	28,27076	2,140799	28,27076	2,140811	28,28234	2,060621
45	187,6423	64,40651	187,0344	64,40651	187,0346	64,40609	186,9363	64,60535
50	251,8911	221,7913	252,7074	221,7913	252,708	221,7907	252,3325	222,1053



Μπλε γραμμή	**Αναλυτική μέθοδος**
Πράσινη γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος Crank-Nicolson**
Μπλε γραμμή (θαλασσί)	**Αριθμητική Μέθοδος 4th Order Runge-Kutta**
Μπλε γραμμή (ανοιχτό)	**Αριθμητική Μέθοδος Explicit forward**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 :ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΣΤΟ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

5.1 ΠΛΕΥΡΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΡΥΘΜΟΣ ΕΚΤΡΟΠΗΣ-ΓΩΝΙΑ ΕΚΤΡΟΠΗΣ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

Επειδή οι αναλυτικές λύσεις είναι αρκετά χρονοβόρες στο μη γραμμικό μοντέλο σε αυτό το κεφάλαιο θα συγκρίνουμε τις αριθμητικές προσεγγίσεις που προκύπτουν από την μέθοδο Runge-Kutta και την μέθοδο Explicit Forward. Χρησιμοποιούμε υπολογιστικό φύλλο και εισάγουμε τις ακόλουθες τιμές

l = 2,560m
M = 1500Kg
Κατανομή μάζας (μπροστα – πίσω): 43%, 57%
δ_u = 0,035rad (2°)
χ = 0
$\tau_1 = \tau_2 = 1$
$N_x = 0$
u = 20m/s

Από την κατανομή μάζας προκύπτει α_1 = 57%*2,56=1,4592m και α_2 = 43%*2,56=1,1008m
Η ροπή αδρανείας Jz≈1500*1,4592*1,1008=2409,43104kg*m^2

Αρχικές συνθήκες t=0,v=0,r=0,ψ=0

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε την ακόλουθη πολυωνυμική συνάρτηση που προέκυψε από πειραματικές μετρήσεις η οποία μας δείχνει την σχέση της πλευρικής δύναμης Y με thn γωνία διύθυνσης α

$Y(\alpha) = -C_1 * \alpha^2 + C_2 * \alpha$	

όπου C_1 = 124,44 και C_2 = 1525,1 με 0≤α≤7°

θεωρούμε ότι οι πλευρικές δυνάμεις Y_1 και Y_2 θα είναι διπλάσιες από την Y άρα θα ισχύει

$\begin{cases} Y_1(\alpha_1) \approx 2*Y(\alpha_1) \\ Y_2(\alpha_2) \approx 2*Y(\alpha_2) \end{cases}$	

$\begin{cases} Y_1(\alpha_1) \approx 2*\left(-C_1*\alpha_1^2 + C_2*\alpha_1\right) \\ Y_2(\alpha_2) \approx 2*\left(-C_1*\alpha_2^2 + C_2*\alpha_2\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1(\alpha_1) \approx -2*C_1*\alpha_1^2 + 2*C_2*\alpha_1 \\ Y_2(\alpha_2) \approx -2*C_1*\alpha_2^2 + 2*C_2*\alpha_2 \end{cases}$	

στην συνέχεια υπολογίζουμε τον ρυθμό μεταβολής dY/dα

$$\begin{cases} \dfrac{dY_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} \approx -4*C_1*\alpha_1 + 2*C_2 \\ \dfrac{dY_2(\alpha_2)}{d\alpha_2} \approx -4*C_1*\alpha_2 + 2*C_2 \end{cases}$$

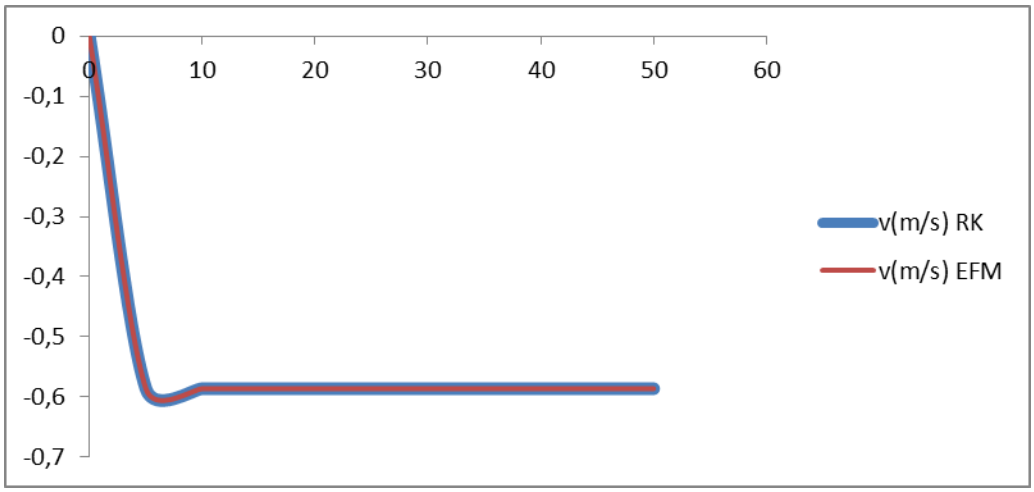
Για τον υπολογισμό της πλευρικής δυσκαμψίας C θεωρούμε ότι $\alpha_1=\alpha_2=0$ άρα προκύπτει

$$\frac{dY_1(\alpha_1)}{d\alpha_1}(0) = \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\alpha_2}(0) \approx 2*C_2$$

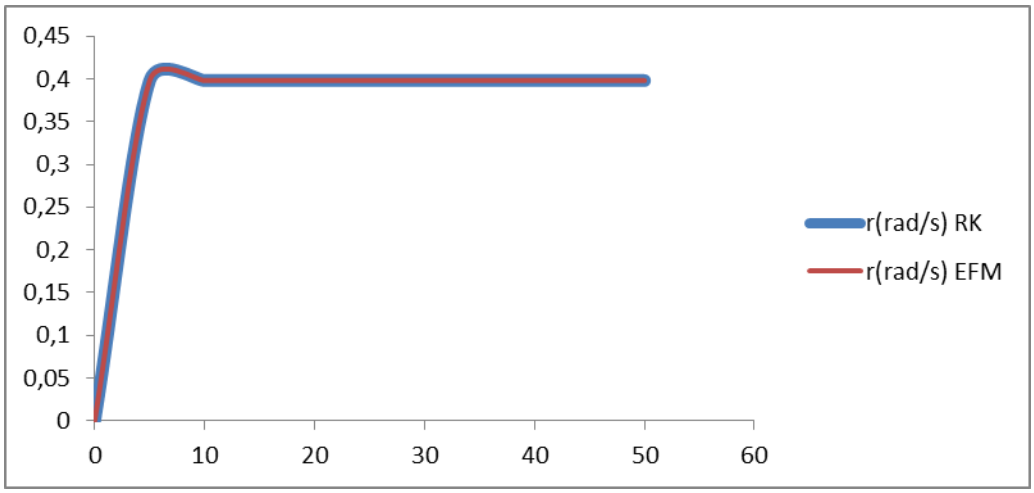
Άρα $C=2*C_2=2*1525,1=3050,2$N/deg=(3050,2/0,0174532925) N/rad=174763,587N/rad

Με την βοήθεια υπολογιστικού φύλλου αρχείου xls δίνουμε τιμές στην χρονική στιγμή t(0-50s με βήμα 0,01s) οπότε προκύπτουν ο ακόλουθοι πίνακες τιμών με μεταβλητές την πλευρική ταχύτητα v, τον ρυθμό εκτροπής r και την γωνία εκτροπής ψ.

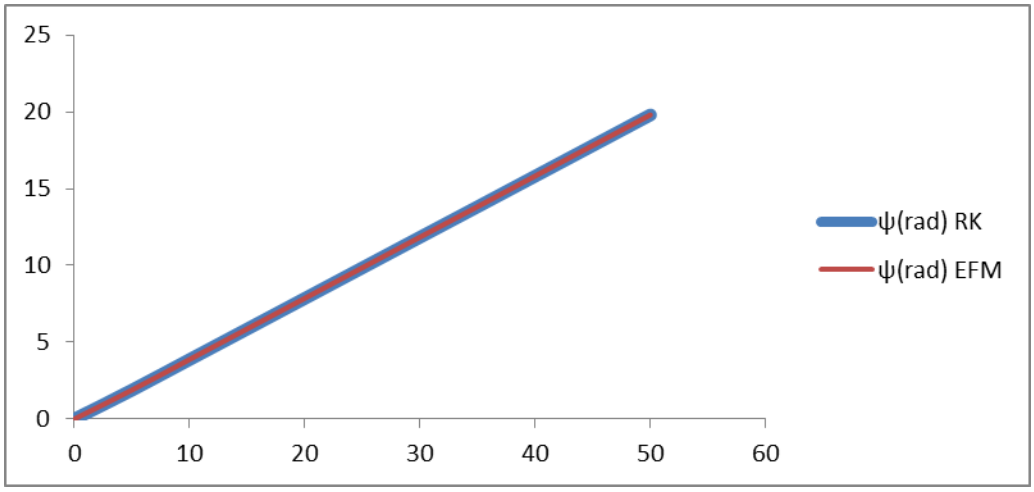
t(sec)	v(m/s) RK	v(m/s) EFM
0	0	0
5	-0,585769407	-0,585818696
10	-0,585974371	-0,585974426
15	-0,585974504	-0,585974504
20	-0,585974504	-0,585974504
25	-0,585974504	-0,585974504
30	-0,585974504	-0,585974504
35	-0,585974504	-0,585974504
40	-0,585974504	-0,585974504
45	-0,585974504	-0,585974504
50	-0,585974504	-0,585974504



t(sec)	r(rad/s) RK	r(rad/s) EFM
0	0	0
5	0,398010749	0,398022576
10	0,398060961	0,398060974
15	0,398060993	0,398060993
20	0,398060993	0,398060993
25	0,398060993	0,398060993
30	0,398060993	0,398060993
35	0,398060993	0,398060993
40	0,398060993	0,398060993
45	0,398060993	0,398060993
50	0,398060993	0,398060993



t(sec)	ψ(rad) RK	ψ(rad) EFM
0	0	0
5	1,889722241	1,894364353
10	3,879993006	3,884644028
15	5,870297951	5,874948983
20	7,860602918	7,86525395
25	9,850907885	9,855558918
30	11,84121285	11,84586388
35	13,83151782	13,83616885
40	15,82182279	15,82647382
45	17,81212775	17,81677879
50	19,80243272	19,80708375

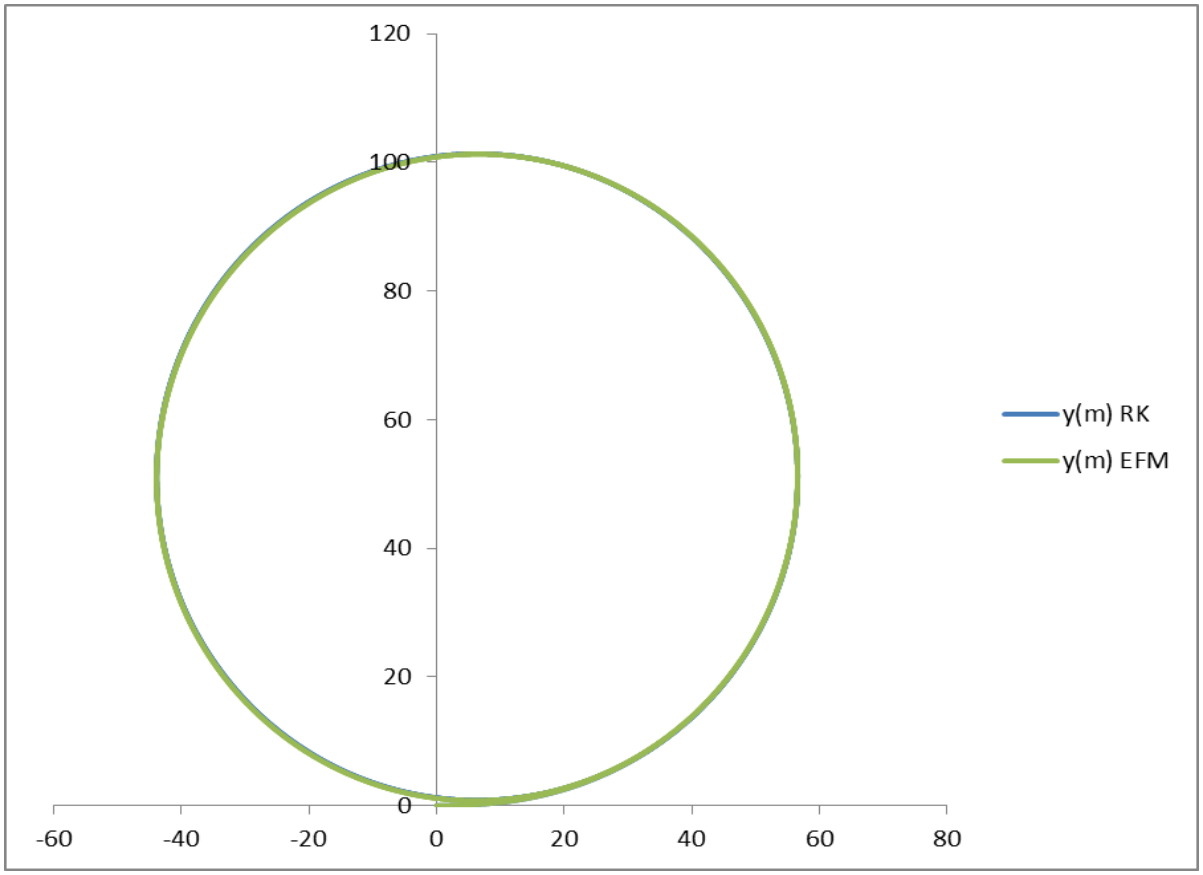


Μπλε γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος 4th Order Runge-Kutta**
Κόκκινη γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος Explicit forward**

5.2 ΘΕΣΕΙΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ ΟΧΗΜΑΤΟΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ) ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

Με την βοήθεια υπολογιστικού φύλλου αρχείου xls δίνουμε τιμές στην χρονική στιγμή t (0-50s με βήμα 0,01s) οπότε προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας τιμών με μεταβλητές την θέση x_0 και την θέση y_0 με την αναλυτική σε σχέση με τις αριθμητικές μεθόδους.

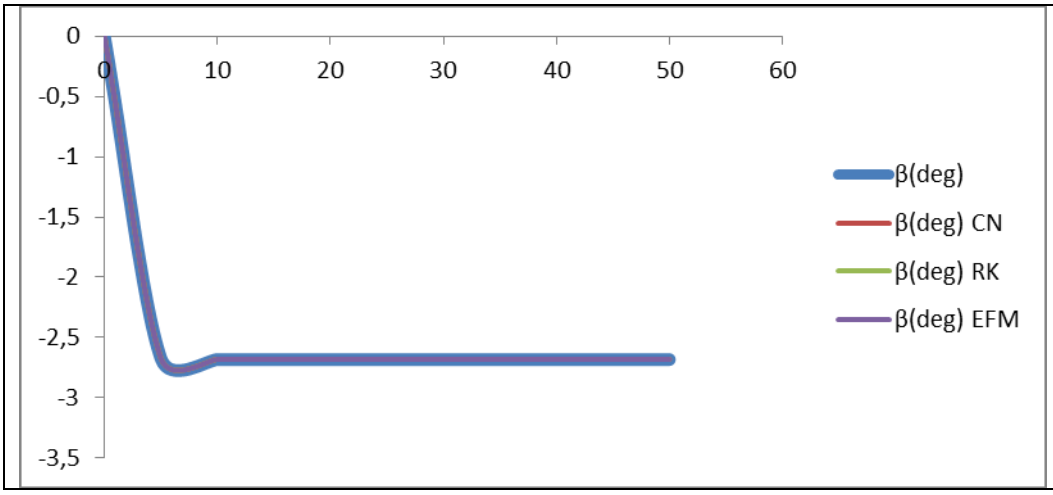
t(sec)	x(m) RK	y(m) RK	x(m) EFM	y(m) EFM
0	0	0	0	0
5	54,52374	65,43324	54,24034	65,59742
10	-26,3792	89,22697	-26,7722	89,01471
15	-15,1575	5,648068	-15,162	5,488903
20	56,60347	49,93936	56,39226	50,11348
25	-13,0764	97,43753	-13,5078	97,28705
30	-28,0745	14,45311	-28,1198	14,23378
35	53,82317	34,556	53,68353	34,71735
40	2,10553	101,1641	1,656654	101,0842
45	-37,6618	26,8007	-37,7643	26,53663
50	46,45125	20,77076	46,3758	20,89798



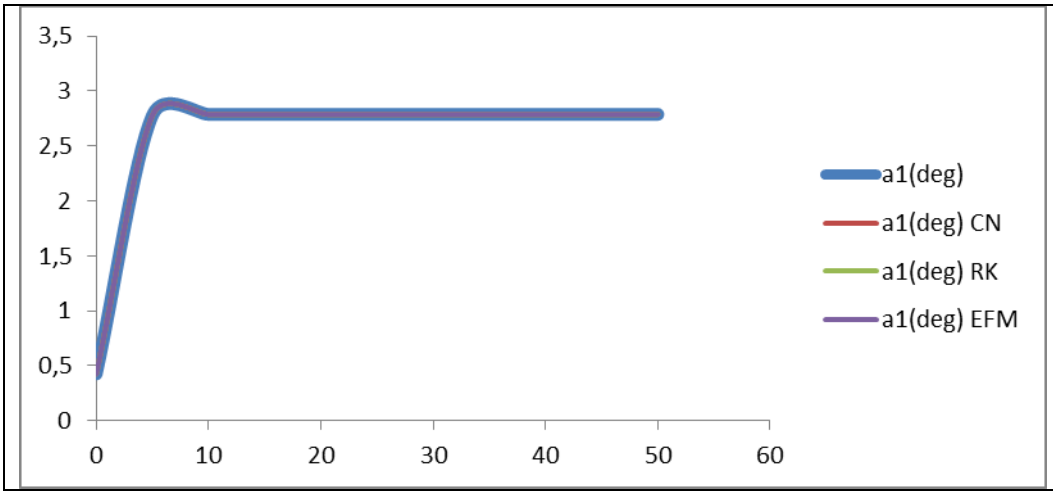
Μπλε γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος 4th Order Runge-Kutta**
Πράσινη γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος Explicit forward**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

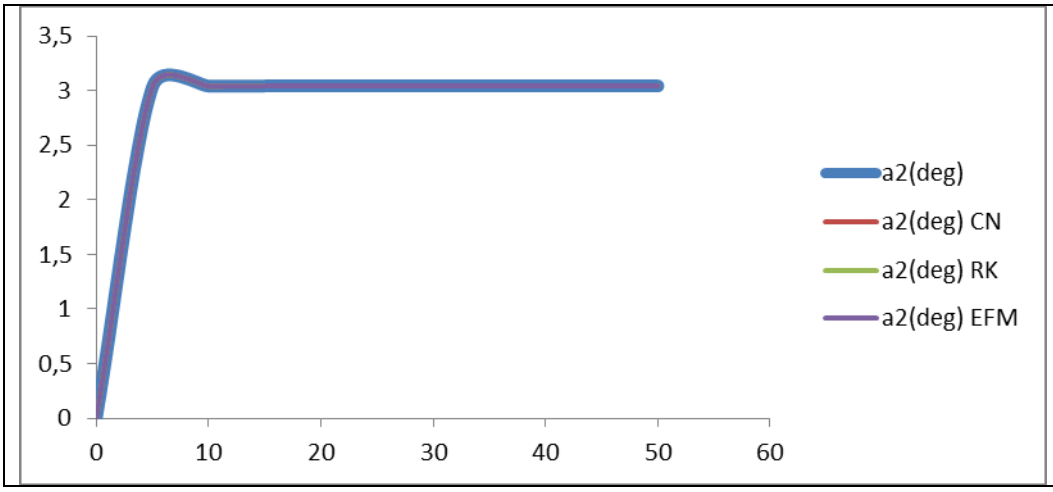
6.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ



γωνία ολίσθησης β συναρτήσει του χρόνου



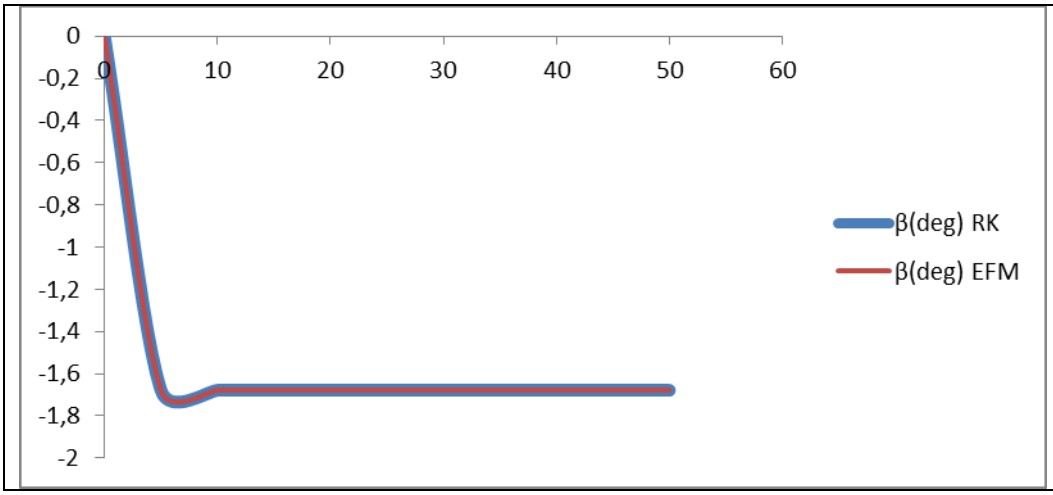
γωνία ολίσθησης a_1 συναρτήσει του χρόνου



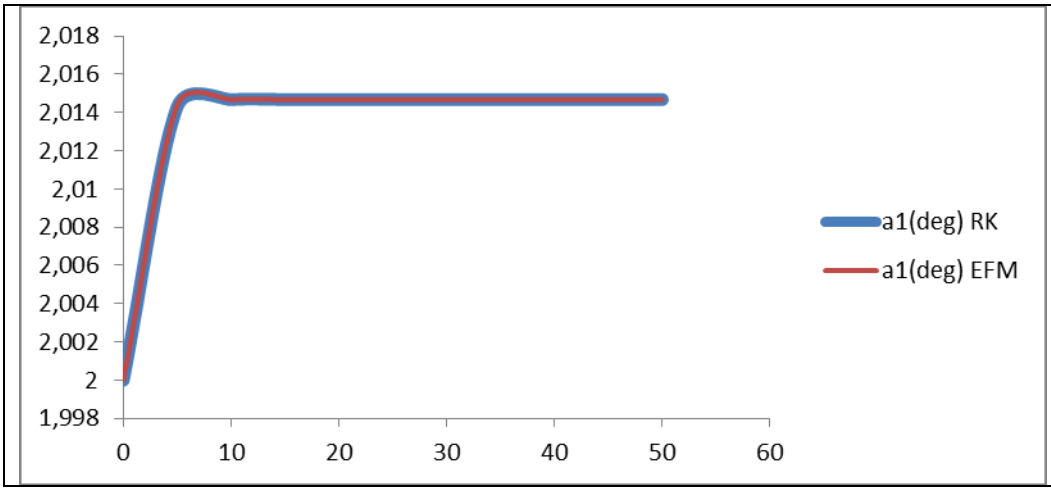
γωνία ολίσθησης a_2 συναρτήσει του χρόνου

Μπλε γραμμή	**Αναλυτική μέθοδος**
Κόκκινη γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος Crank-Nicolson**
Πράσινη γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος 4th Order Runge-Kutta**
Μωβ γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος Explicit forward**

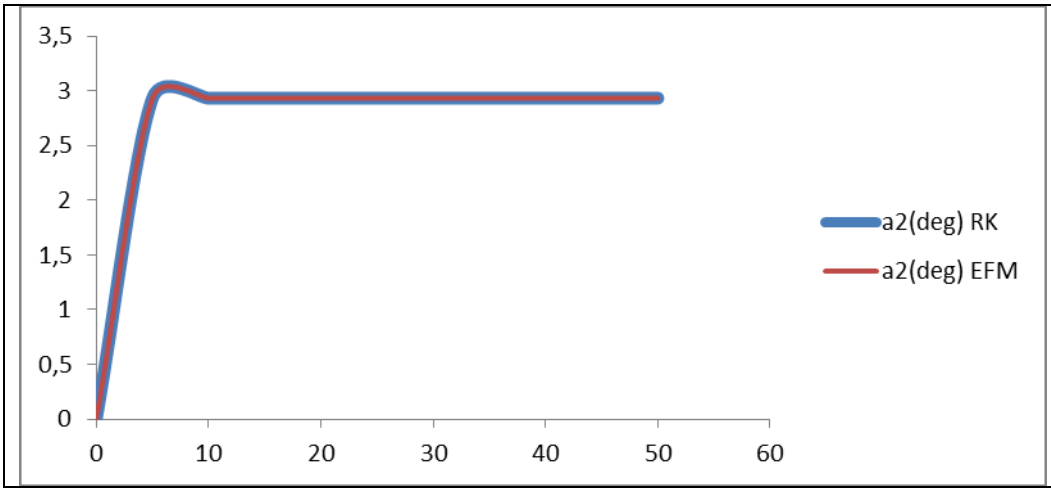
6.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ



Γωνία ολίσθησης β συναρτήσει του χρόνου



γωνία ολίσθησης α_1 συναρτήσει του χρόνου



γωνία ολίσθησης α_2 συναρτήσει του χρόνου

Μπλε γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος 4th Order Runge-Kutta**
Κόκκινη γραμμή	**Αριθμητική Μέθοδος Explicit forward**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 : ΚΙΝΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ ΣΕ ΔΡΟΜΟ ΜΕ ΚΛΙΣΗ

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε την κίνηση οχήματος σε στροφή με κλίση (bank angle ***θ***) και θα προσδιορίσουμε την σχέση που συνδέει την γωνία ολίσθησης ***β*** και τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ολίσθησης ***dβ/dt.***

7.1 Βασικές Παραδοχές και εξισώσεις

$a_x = \dot{u} - v*r = \dot{u} - u^2*\beta*\rho$	(1.23) ή (2.2.1) ή (7.1.1)

$a_y = \dot{v} + u*r = u*\dot{\beta} + \dot{u}*\beta + u^2*\rho$	(1.24) ή (2.2.2) ή (7.1.2)

$m*\alpha_x = X_1 + X_2 - X_\alpha - m*g*\sin\theta*\sin\beta$ $m*\alpha_y = Y_1 + Y_2 + m*g*\sin\theta*\cos\beta$ $m*\left(-\alpha_x*\sin\beta + \alpha_y*\cos\beta\right)*\sin\theta = Z_1 + Z_2 - m*g*\cos\theta + Z_{\alpha 1} + Z_{\alpha 2}$	(7.1.3), (7.1.4) και (7.1.5)

$-J_{zx}*\dot{r} = L \Rightarrow -J_{zx}*\dot{r} = -\Delta Z_1*t_1 - \Delta Z_2*t_2 + (Y_1 + Y_2)*h$	(1.63 d) ή (2.2.6) ή (7.1.6)
$-J_{zx}*r^2 = M \Rightarrow -J_{zx}*r^2 = -Z_1*\alpha_1 + Z_2*\alpha_2 - (X_1 + X_2 - X_\alpha)*h - Z_{\alpha 1}*\alpha_1 + Z_{\alpha 2}*\alpha_2$	(1.63 e) ή (2.2.7) ή (7.1.7)
$J_z*\dot{r} = N \Rightarrow J_z*\dot{r} = Y_1*\alpha_1 - Y_2*\alpha_2 + \Delta X_1*t_1 + \Delta X_2*t_2$	(1.63 f) ή (2.2.8) ή (7.1.8)

$N_Y = Y_1*\alpha_1 - Y_2*\alpha_2$	(1.65 a) ή (2.2.9) ή (7.1.9)
$N_X = \Delta X_1*t_1 + \Delta X_2*t_2$	(1.65 b) ή (2.2.10) ή (7.1.10)

$J_z*\dot{r} = N_X + N_Y = N$	(1.66) ή (2.2.11) ή (7.1.11)

$x_N = \frac{N_Y}{Y}$	(1.68) ή (2.2.12) ή (7.1.12)

$Y_1 = c_{y1} - c_{y2}*\frac{v}{u} - c_{y3}*\frac{r}{u} = c_{y1} - c_{y2}*\beta - c_{y3}*\rho$ $Y_2 = c_{y4} - c_{y5}*\frac{v}{u} - c_{y6}*\frac{r}{u} = c_{y4} - c_{y5}*\beta - c_{y6}*\rho$ $\dot{r} = u*\dot{\rho} + \dot{u}*\rho$	(7.1.13), (7.1.14) και (7.1.15)

$c_{y1} = C_1 * \tau_1 * \delta_v$ $c_{y2} = C_1$ $c_{y3} = C_1 * \alpha_1$ $c_{y4} = C_2 * \tau_1 * \delta_v * \chi \xrightarrow{\chi=1 \to \chi \approx 0} c_{y4} = 0$ $c_{y5} = C_2$ $c_{y6} = -C_2 * \alpha_2$	

$N_x = \Delta X_1 * t_1 + \Delta X_2 * t_2 = 0$	(2.1.45) ή (2.2.19) ή (7.1.16)

$u = c$	(2.2.20) ή (7.1.17)

Γνωρίζοντας ότι η γωνία ***β*** είναι αρκετά μικρή (***cosβ≈1***) κάνουμε την ακόλουθη παραδοχή

$\sin\beta \approx \beta$ $\cos\beta \approx 1$	(7.1.18)

<u>7.2 Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις</u>

Αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (7.1.8) και (7.1.16) προκύπτει

$Y_1 * \alpha_1 - Y_2 * \alpha_2 = J_z * \dot{r}$	(7.1.19)

Αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (7.1.15) και (7.1.17) προκύπτει

$\dot{r} = c * \dot{\rho}$	(7.1.20)

Αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (7.1.2) και (7.1.17) προκύπτει

$\alpha_y = c * \dot{\beta} + c^2 * \rho$	(7.1.21)

Αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (7.1.4) και (7.1.19) προκύπτει το σύστημα

$\begin{cases} Y_1 + Y_2 + m * g * \sin\theta * \cos\beta = m * \alpha_y \\ Y_1 * \alpha_1 - Y_2 * \alpha_2 = J_z * \dot{r} \end{cases}$	

Στο σύστημα εισάγουμε τις εξισώσεις (7.1.13), (7.1.14), (7.1.18), (7.1.20) και (7.1.21) άρα προκύπτει

$\begin{cases} (c_{y1} - c_{y2} * \beta - c_{y3} * \rho) * \alpha_1 - (c_{y4} - c_{y5} * \beta - c_{y6} * \rho) * \alpha_2 = J_z * c * \dot{\rho} \\ c_{y1} - c_{y2} * \beta - c_{y3} * \rho + c_{y4} - c_{y5} * \beta - c_{y6} * \rho = m * (c * \dot{\beta} + c^2 * \rho) - m * g * \sin\theta * \cos\beta \end{cases}$	

Και εκτελούμε πράξεις

$$\begin{cases} c_{y1}*\alpha_1 - c_{y2}*\alpha_1*\beta - c_{y3}*\alpha_1*\rho - c_{y4}*\alpha_2 + c_{y5}*\alpha_2*\beta + c_{y6}*\alpha_2*\rho = J_z*c*\dot{\rho} \\ c_{y1} - c_{y2}*\beta - c_{y3}*\rho + c_{y4} - c_{y5}*\beta - c_{y6}*\rho = m*c*\dot{\beta} + m*c^2*\rho - m*g*\sin\theta*\cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_z*c*\dot{\rho} = \left(c_{y5}*\alpha_2 - c_{y2}*\alpha_1\right)*\beta + \left(c_{y6}*\alpha_2 - c_{y3}*\alpha_1\right)*\rho + c_{y1}*\alpha_1 - c_{y4}*\alpha_2 \\ m*c*\dot{\beta} = m*g*\sin\theta*\cos\beta - \left(c_{y2} + c_{y5}\right)*\beta - \left(c_{y3} + c_{y6} + m*c^2\right)*\rho + c_{y1} + c_{y4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \dfrac{c_{y5}*\alpha_2 - c_{y2}*\alpha_1}{J_z*c}*\beta + \dfrac{c_{y6}*\alpha_2 - c_{y3}*\alpha_1}{J_z*c}*\rho + \dfrac{c_{y1}*\alpha_1 - c_{y4}*\alpha_2}{J_z*c} \\ \dot{\beta} = \dfrac{g*\sin\theta}{c}*\cos\beta - \dfrac{c_{y2} + c_{y5}}{m*c}*\beta - \dfrac{c_{y3} + c_{y6} + m*c^2}{m*c}*\rho + \dfrac{c_{y1} + c_{y4}}{m*c} \end{cases}$$

(7.1.22α) και (7.1.22β)

Προς διευκόλυνση των πράξεων που απαιτούνται ορίζουμε τις σταθερές

$$c_{y7} = \frac{c_{y5}*\alpha_2 - c_{y2}*\alpha_1}{J_z*c}$$

$$c_{y8} = \frac{c_{y6}*\alpha_2 - c_{y3}*\alpha_1}{J_z*c}$$

$$c_{y9} = \frac{c_{y1}*\alpha_1 - c_{y4}*\alpha_2}{J_z*c}$$

$$c_{y10} = \frac{g*\sin\theta}{c}$$

$$c_{y11} = \frac{c_{y2} + c_{y5}}{m*c}$$

$$c_{y12} = \frac{c_{y3} + c_{y6} + m*c^2}{m*c}$$

$$c_{y13} = \frac{c_{y1} + c_{y4}}{m*c}$$

Με αυτό τον τρόπο προκύπτει ένα απλούστερο σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \dot{\rho} = c_{y7}*\beta + c_{y8}*\rho + c_{y9} \\ \dot{\beta} = c_{y10}*\cos\beta - c_{y11}*\beta - c_{y12}*\rho + c_{y13} \end{cases}$$

(7.1.23) και (7.1.24)

7.3 Προσδιορισμός συνάρτησης γωνίας ολίσθησης β

Για να προσδιορίσουμε την συνάρτηση της γωνίας ολίσθησης ***β*** πρέπει να λύσουμε το σύστημα που αποτελείται από τις εξισώσεις (7.1.23) και (7.1.24). Το σύστημα αυτό θα το λύσουμε με την Μέθοδο της Απαλοιφής (αντικατάστασης)

$$\begin{cases} \dot{\rho} = c_{y7} * \beta + c_{y8} * \rho + c_{y9} \\ \rho = -\dfrac{1}{c_{y12}} * \dot{\beta} + \dfrac{c_{y10}}{c_{y12}} * \cos\beta - \dfrac{c_{y11}}{c_{y12}} * \beta + \dfrac{c_{y13}}{c_{y12}} \\ \dot{\rho} = -\dfrac{1}{c_{y12}} * \ddot{\beta} - \dfrac{c_{y10}}{c_{y12}} * \sin\beta * \dot{\beta} - \dfrac{c_{y11}}{c_{y12}} * \dot{\beta} \end{cases}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{c_{y12}} * \ddot{\beta} - \frac{c_{y10}}{c_{y12}} * \sin\beta * \dot{\beta} - \frac{c_{y11}}{c_{y12}} * \dot{\beta} = c_{y7} * \beta + c_{y8} * \left(-\frac{1}{c_{y12}} * \dot{\beta} + \frac{c_{y10}}{c_{y12}} * \cos\beta - \frac{c_{y11}}{c_{y12}} * \beta + \frac{c_{y13}}{c_{y12}} \right) + c_{y9}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{c_{y12}} * \ddot{\beta} - \frac{c_{y10}}{c_{y12}} * \sin\beta * \dot{\beta} - \frac{c_{y11}}{c_{y12}} * \dot{\beta} = c_{y7} * \beta - c_{y8} * \frac{1}{c_{y12}} * \dot{\beta} + c_{y8} * \frac{c_{y10}}{c_{y12}} * \cos\beta - c_{y8} * \frac{c_{y11}}{c_{y12}} * \beta + c_{y8} * \frac{c_{y13}}{c_{y12}} + c_{y9}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{c_{y12}} * \ddot{\beta} - \frac{c_{y10}}{c_{y12}} * \sin\beta * \dot{\beta} - \frac{c_{y11}}{c_{y12}} * \dot{\beta} = c_{y7} * \beta - c_{y8} * \frac{1}{c_{y12}} * \dot{\beta} + c_{y8} * \frac{c_{y10}}{c_{y12}} * \cos\beta - c_{y8} * \frac{c_{y11}}{c_{y12}} * \beta + c_{y8} * \frac{c_{y13}}{c_{y12}} + c_{y9}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{c_{y12}} * \ddot{\beta} - \frac{c_{y10}}{c_{y12}} * \sin\beta * \dot{\beta} - \frac{c_{y11}}{c_{y12}} * \dot{\beta} - c_{y7} * \beta + c_{y8} * \frac{1}{c_{y12}} * \dot{\beta} - c_{y8} * \frac{c_{y10}}{c_{y12}} * \cos\beta + c_{y8} * \frac{c_{y11}}{c_{y12}} * \beta - c_{y8} * \frac{c_{y13}}{c_{y12}} - c_{y9} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{c_{y12}} * \ddot{\beta} + \left(\frac{c_{y8}}{c_{y12}} - \frac{c_{y10}}{c_{y12}} * \sin\beta - \frac{c_{y11}}{c_{y12}} \right) * \dot{\beta} + \left(\frac{c_{y8} * c_{y11}}{c_{y12}} - c_{y7} \right) * \beta - \frac{c_{y8} * c_{y10}}{c_{y12}} * \cos\beta - \frac{c_{y8} * c_{y13}}{c_{y12}} - c_{y9} = 0$$

$$\ddot{\beta} + \left(-c_{y8} + c_{y10} * \sin\beta + c_{y11} \right) * \dot{\beta} + \left(-c_{y8} * c_{y11} + c_{y12} * c_{y7} \right) * \beta + c_{y8} * c_{y10} * \cos\beta + c_{y8} * c_{y13} + c_{y12} * c_{y9} = 0$$

Και μέσω της παραδοχής (7.1.18) προκύπτει

$$\ddot{\beta} + \left(c_{y10} * \beta + c_{y11} - c_{y8} \right) * \dot{\beta} + \left(-c_{y8} * c_{y11} + c_{y12} * c_{y7} \right) * \beta + c_{y8} * c_{y10} + c_{y8} * c_{y13} + c_{y12} * c_{y9} = 0 \qquad (7.1.25)$$

Προς διευκόλυνση των πράξεων που απαιτούνται ορίζουμε τις σταθερές

$$c_{y14} = c_{y11} - c_{y8}$$
$$c_{y15} = -c_{y8} * c_{y11} + c_{y12} * c_{y7}$$
$$c_{y16} = c_{y8} * c_{y10} + c_{y8} * c_{y13} + c_{y12} * c_{y9}$$

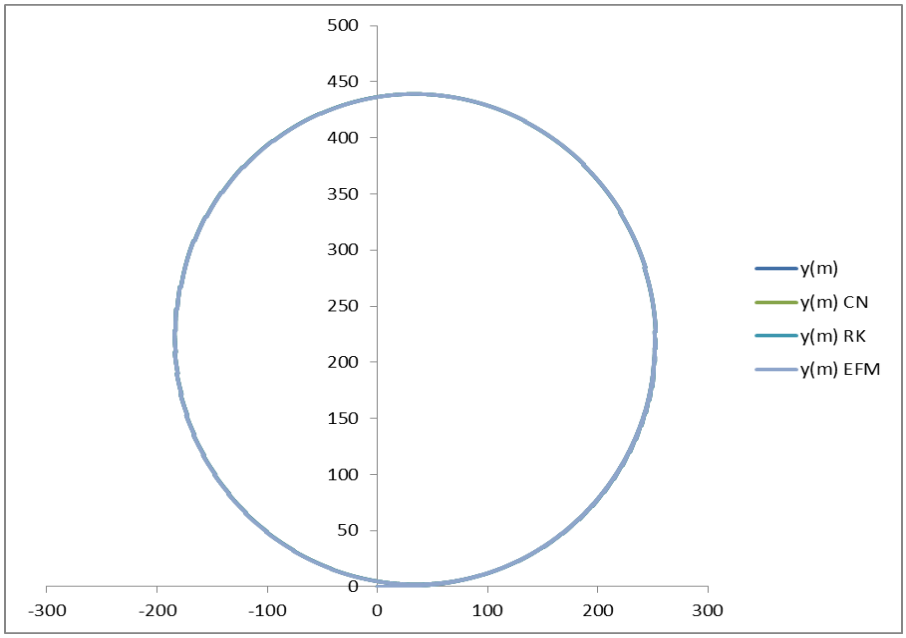
Με αυτό τον τρόπο προκύπτει μια απλούστερη μη γραμμική διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού με σταθερούς συντελεστές η οποία επιλύεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV

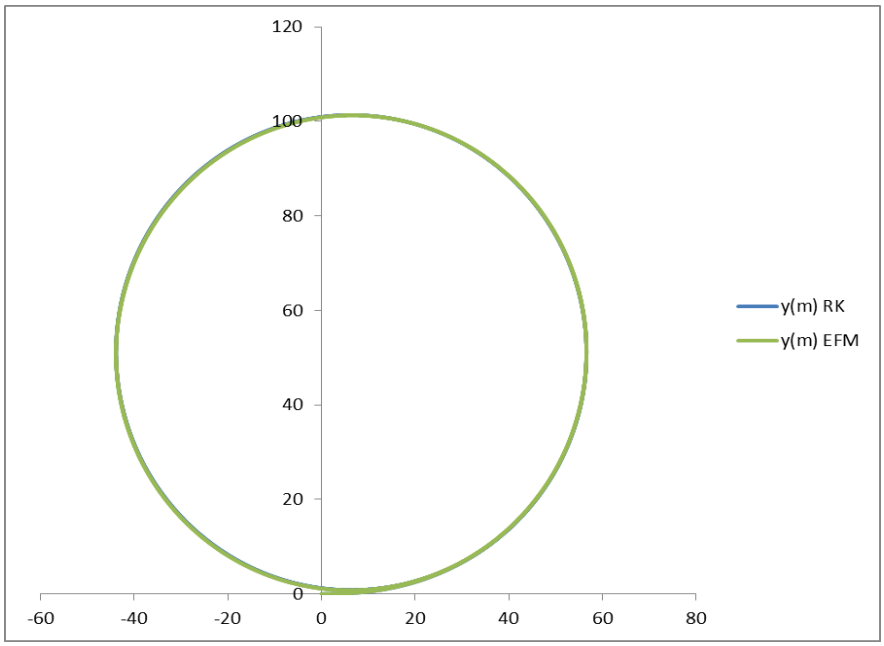
$$\ddot{\beta} + \left(c_{y10} * \beta + c_{y14} \right) * \dot{\beta} + c_{y15} * \beta + c_{y16} = 0 \qquad (7.1.26)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 : ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΡΟΧΙΑΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΡΙΣΙΜΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

8.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΡΟΧΙΑΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Στα κεφάλαια 4 και 5 υπολογίσαμε την τροχιά του οχήματος με αρχικές συνθήκες t=0,v=0,r=0,ψ=0 όπου προέκυψε κυκλική τροχιά όπως φαίνεται παρακάτω





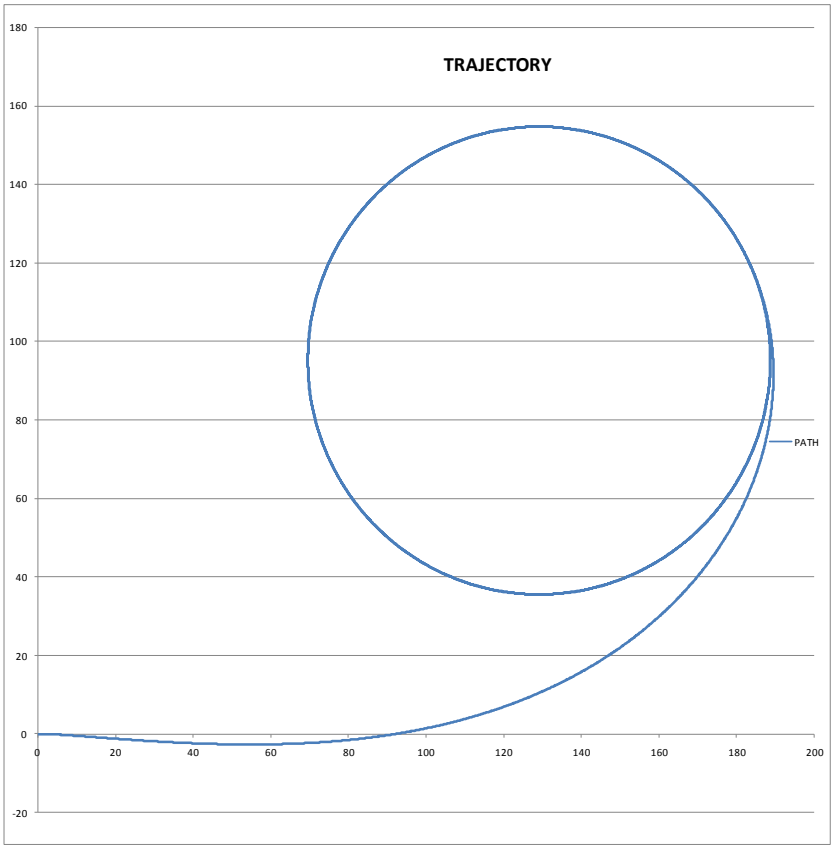
Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε δυο περιπτώσεις (αριθμητικά μοντέλα) όπου δεν θα λάβουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες v_0=0 και r_0=0

1η περίπτωση Αργή στροφή με γωνία 2.0ο, Μη μηδενικές αρχικές συνθήκες (Αριστερή στροφή)

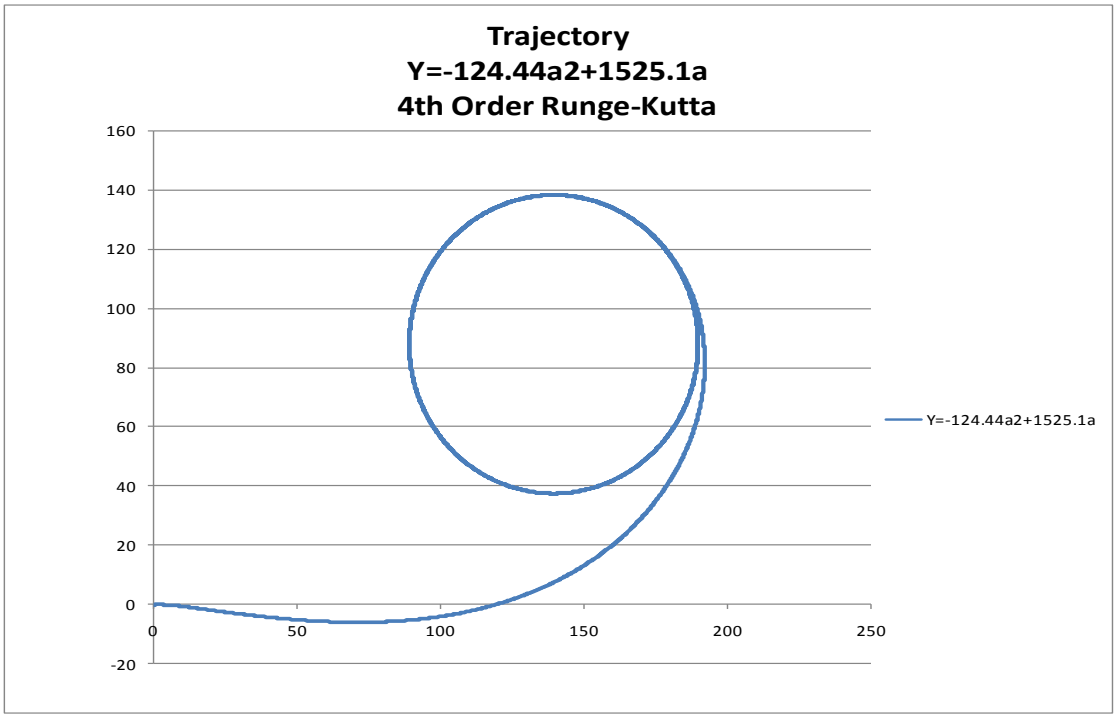
Σε αυτή την περίπτωση για αριστερή στροφή για t=0 λαμβάνουμε v_0=0,7m/s (nose out) και r_0=-0.7rad/s (η στροφή γίνεται σταδιακά και οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδενικές).

Θεωρείται ότι χρειάζονται 14 δευτερόλεπτα για να ολοκληρωθεί η στροφή του τιμονιού (ο συγκεκριμένος χρόνος διεύθυνσης δεν είναι πρακτικός, αλλά ο στόχος εδώ είναι ο έλεγχος του μοντέλου, καθώς και τα μεταβατικά και περιοριστικά όρια της διαδρομής).

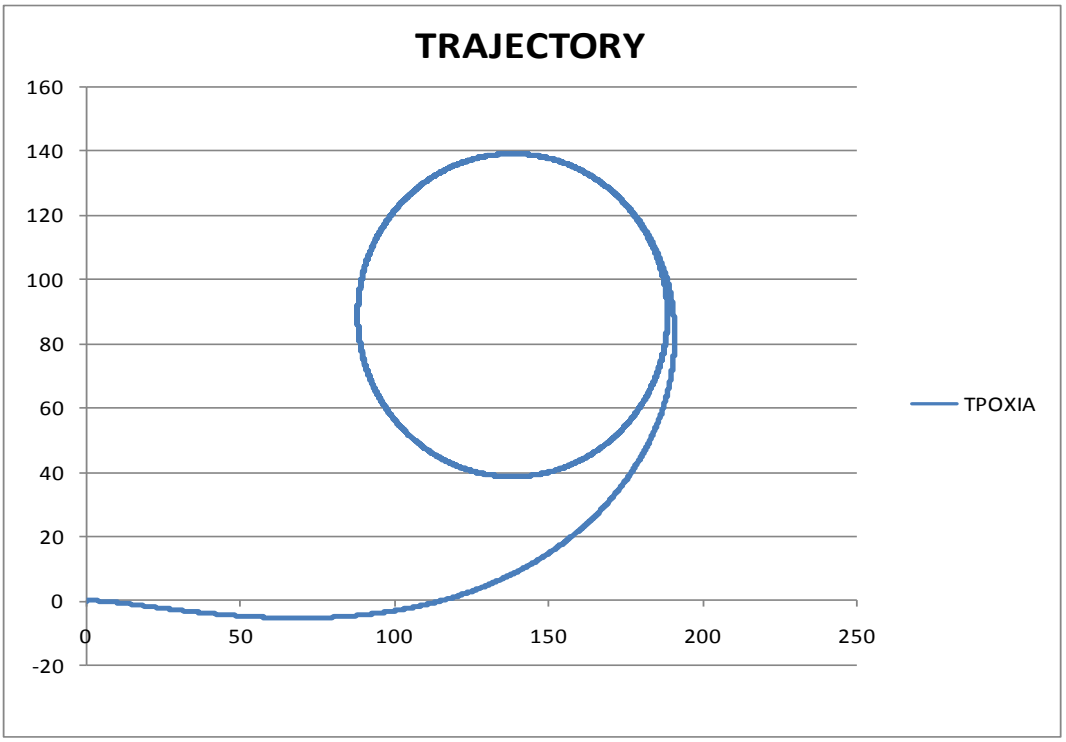
Μετά από υπολογισμούς προκύπτουν οι ακόλουθες τροχιές



Κυκλική τροχιά οχήματος (στοιχειώδης εξίσωση γραμμικής πλευρικής δύναμης ελαστικού), Μέθοδος Crank-Nicolson



Κυκλική τροχιά οχήματος (στοιχειώδης εξίσωση μη γραμμικής πλευρικής δύναμης ελαστικού), Μέθοδος Runge-Kutta 4ης ταξης



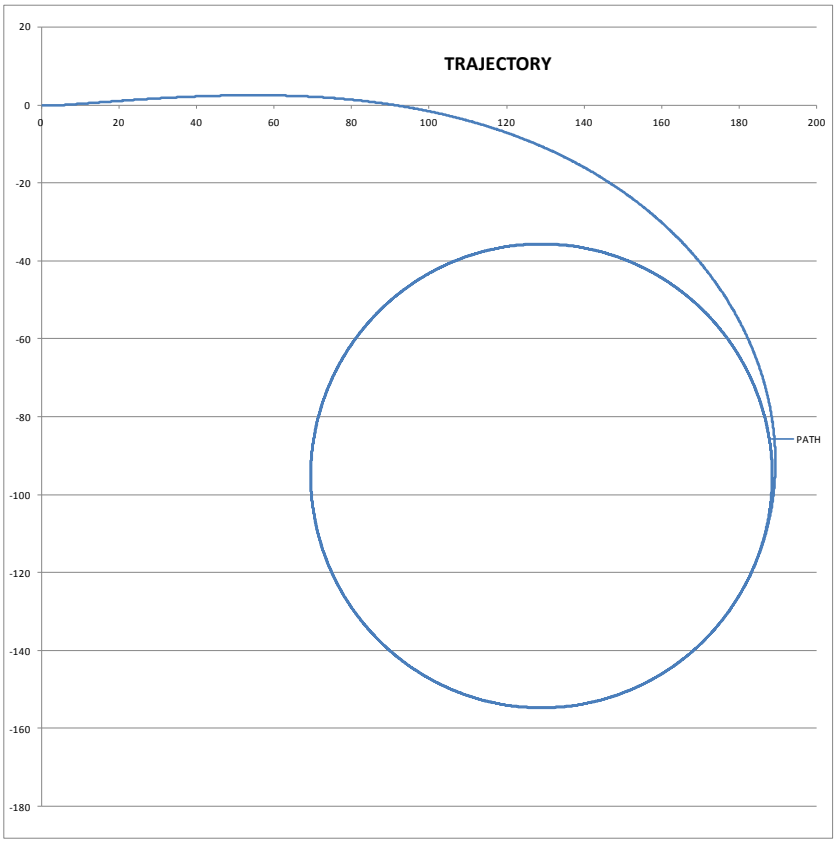
Κυκλική τροχιά οχήματος (στοιχειώδης εξίσωση μη γραμμικής πλευρικής δύναμης ελαστικού), Μέθοδος Explicit Forward time integration

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι ακριβώς τα ίδια με τα προηγούμενα. Η διαφορά στην νέα τροχιά σχετίζεται μόνο με τη μεταβατική περίοδο, λόγω της φύσης των αρχικών δεδομένων και του χρόνου διεύθυνσης των 12 δευτερολέπτων.

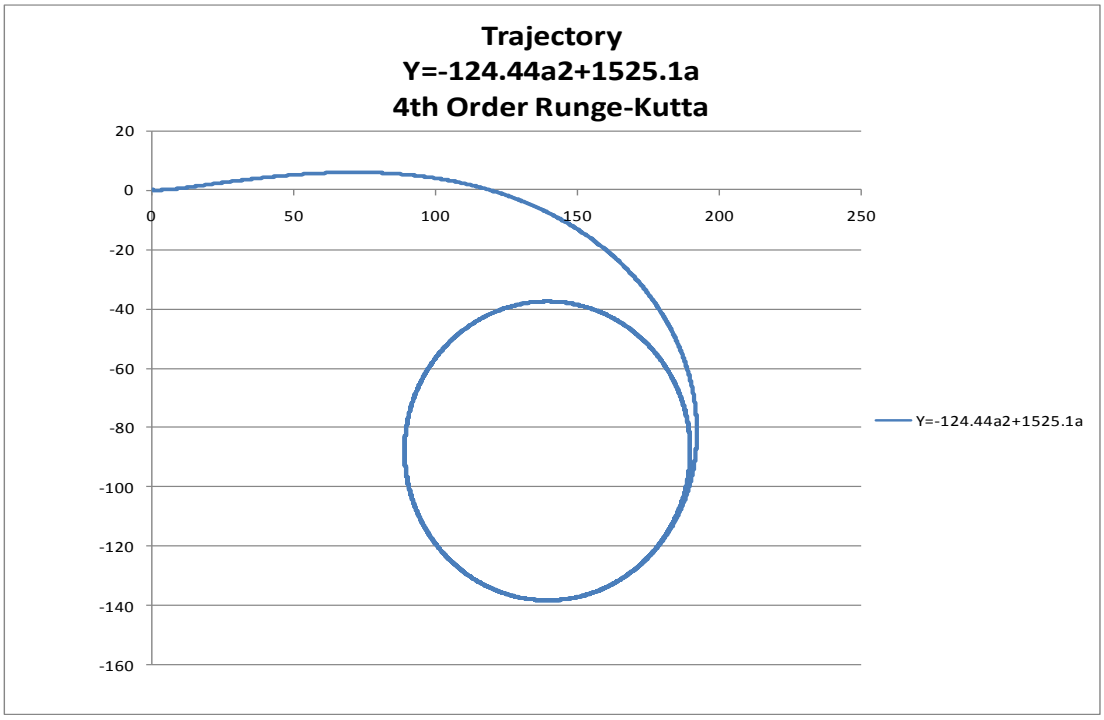
2η περίπτωση Αργή στροφή με γωνία 2.0ο, Μη μηδενικές αρχικές συνθήκες (Δεξιά στροφή)

Σε αυτή την περίπτωση για δεξιά στροφή για t=0 λαμβάνουμε v_0=-0,7m/s (nose out) και r_0=0.7rad/s(opposite to the right turn trajectory).

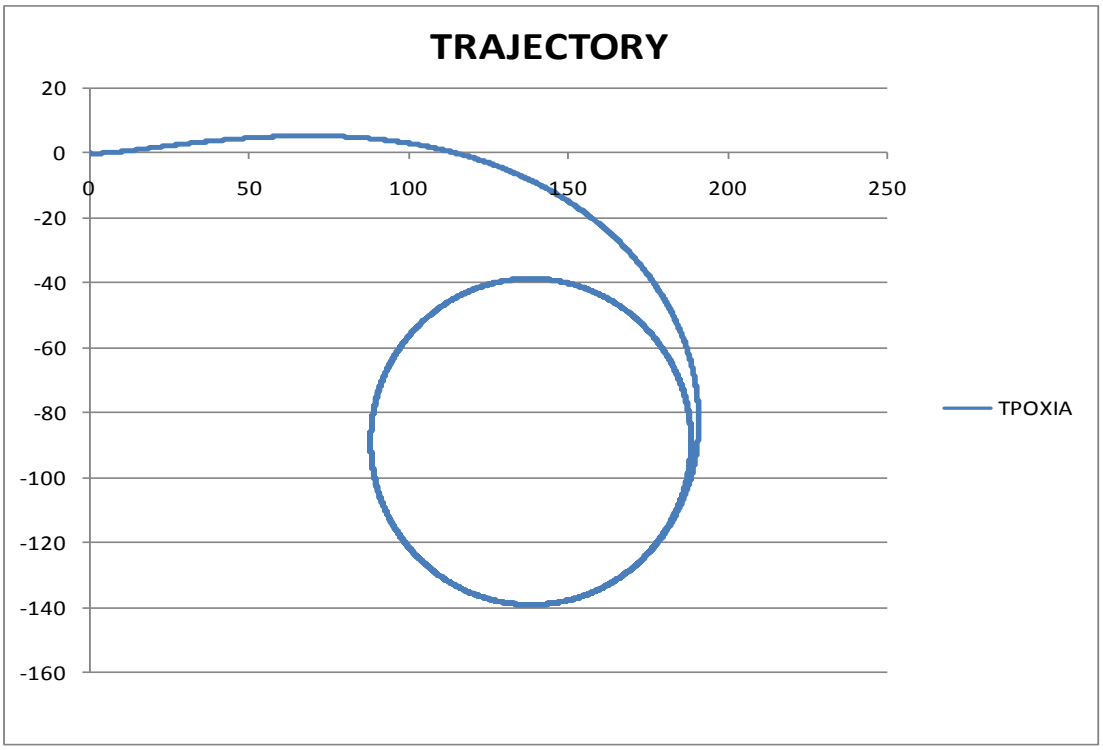
Μετά από υπολογισμούς προκύπτουν οι ακόλουθες τροχιές



Κυκλική τροχιά οχήματος (στοιχειώδης εξίσωση γραμμικής πλευρικής δύναμης ελαστικού), Μέθοδος Crank-Nicolson



Κυκλική τροχιά οχήματος (στοιχειώδης εξίσωση μη γραμμικής πλευρικής δύναμης ελαστικού), Μέθοδος Runge-Kutta 4ης ταξης



Κυκλική τροχιά οχήματος (στοιχειώδης εξίσωση μη γραμμικής πλευρικής δύναμης ελαστικού), Μέθοδος Explicit Forward time integration

Και στις δυο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι οι τροχιές είναι απολύτως συμμετρικές το οποίο αποδεικνύει την ορθότητα των περιπτώσεων αυτών. Επίσης η διαφορετικότητα των τροχιών των δυο περιπτώσεων σε σχέση με αυτές που προέκυψαν από τα κεφάλαια 4 και 5 οφείλεται τόσο στις διαφορετικές αρχικές συνθήκες όσο και στα 14 δευτερόλεπτα για να ολοκληρωθεί η στροφή του τιμονιού.

8.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΡΙΣΙΜΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

Με τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε στην ενότητα 5.1 υπολογίζουμε την κρίσιμη ταχύτητα του οχήματος

l = 2,560m
M = 1500Kg
Κατανομή μάζας (μπροστα – πίσω): 43%, 57%
δ_u = 0,035rad (2º)
$\chi = 0$
$\tau_1 = \tau_2 = 1$
$N_x = 0$
u = 20m/s

α_1 = 57%*2,56=1,4592m
α_2 = 43%*2,56=1,1008m
Jz≈1500*1,4592*1,1008=2409,43104kg*m^2
C_1=C_2=3050,2N/deg=174763,587N/rad

Από την εξίσωση 2.2.33 προκύπτει u_{cr} = 46,1568125663559m/s ≈ 46,157m/s

Αν χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη σχέση που προκύπτει από το κεφάλαιο 5

$$u_{crit} = \sqrt{\frac{C_1 C_2 l^2}{m(C_1 a_1 - C_2 a_2)}}$$

προκύπτει όμοια u_{cr} = 46,1568125663559m/s ≈ 46,157m/s

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Η μελέτη ενός συμβατικού οχήματος και η προεκτίμηση της οδικής συμπεριφοράς του από το στάδιο του αρχικού σχεδιασμού κρίνεται απαραίτητη καθώς επιταχύνει την διαδικασία του τελικού σχεδιασμού του. Ο ακριβής προσδιορισμός της συμπεριφοράς του δεν είναι εύκολος καθώς πλήθος παραγόντων και συνθηκών επηρεάζουν την τελική ακρίβεια των υπολογισμών εισάγοντας σφάλματα. Οι σημαντικότερες αιτίες σφαλμάτων είναι:
α) η γεωμετρία της ανάρτησης
β) οι ιδιότητες ελαστικότητας και απόσβεσης της ανάρτησης
γ) η μη γραμμική συμπεριφορά των ελαστικών

Ως διαδικασία προεκτίμησης κατά το αρχικό στάδιο σχεδιασμού, αναπτύχθηκε μαθηματικό μοντέλο ικανό να προσδιορίζει την κίνηση οχήματος τεσσάρων τροχών σε καμπύλη τροχιά (Single Track Model). Επίσης, με εφαρμογή του μοντέλου αυτού προσδιορίζεται η κινηματική των αναρτήσεων και του συστήματος διεύθυνσης και αναλύεται η επίδραση τους στην συμπεριφορά του συμβατικού οχήματος. Για την ανάπτυξη του παραπάνω μοντέλου θεωρήθηκε ως βασική προϋπόθεση ότι αυτό θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη του:
α) την πλήρη κινηματική και δυναμική ανάλυση της ανάρτησης και του συστήματος διεύθυνσης.
β) την επίδραση της θέσης και της μεταβολής του αξονα περιστροφής.
γ) την επίδραση του συστήματος μετάδοσης ισχύος (χρήση ανοικτου διαφορικού)
δ) τη μη γραμμική τάση των ελαστικών να πλαγιοπορούν όταν δεχτούν πλευρική φόρτιση.

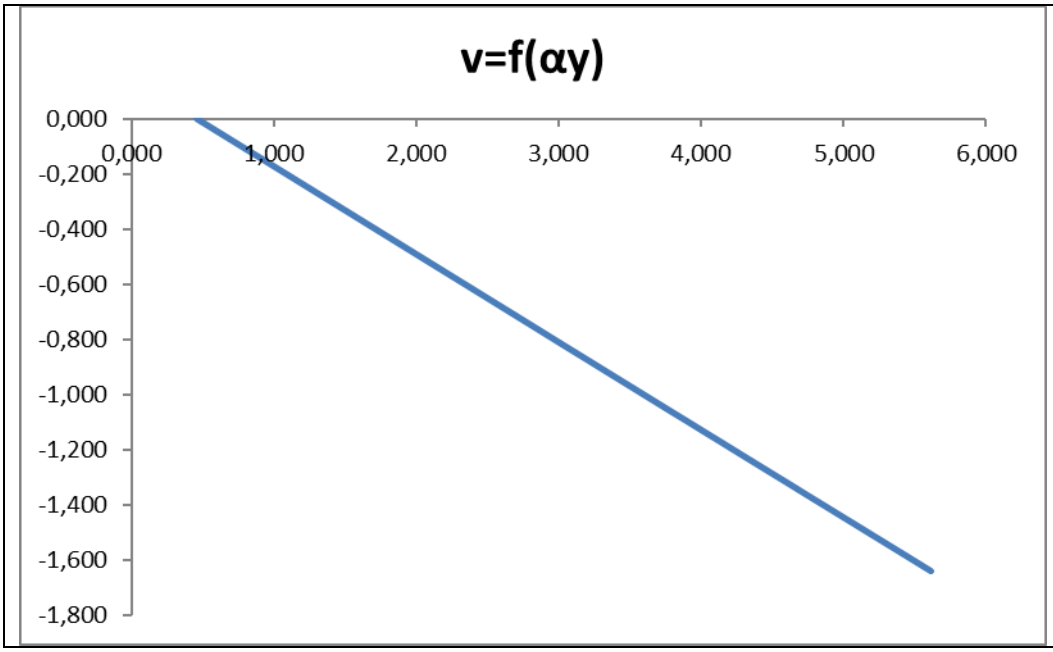
Επίσης η συνολική διαδικασία επιτρέπει :
α) τον προσδιορισμό της κίνησης οχήματος σε κυκλική πορεία χωρίς περιορισμό στις αναπτυσσόμενες επιταχύνσεις/επιβραδύνσεις
β) την πλήρη γεωμετρική περιγραφή του οχήματος κάνοντας χρήση μεγεθών που μπορούν να προκύψουν από συστάσεις
γ) την αναλυτική περιγραφή της θέσης των τροχών στην επαφή τους με το οδόστρωμα για κάθε συνθήκη φόρτισης τους
δ) την πλήρη περιγραφή της συμπεριφοράς των ελαστικών με βάση τα κατασκευαστικά τους χαρακτηριστικά

Με εφαρμογή του παραπάνω μοντέλου μπορεί να επιταχυνθεί η διαδικασία σχεδιασμού ενός συμβατικού οχήματος αφού η τελική συμπεριφορά του μπορεί να προβλεφθεί με αρκετά μεγάλη ακρίβεια με τη βοήθεια βασικών γεωμετρικών και κατασκευαστικών μεγεθών και χωρίς να έχουν περιγραφεί ο κινηματικός μηχανισμός της ανάρτησης και του συστήματος διεύθυνσης. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να λειτουργήσουν ως ενδεικτικές συστάσεις για την εκλογή των καίριων γεωμετρικών δεδομένων κατά το στάδιο της προμελέτης συμβατικών οχημάτων. Τέλος, με τις αριθμητικές προσεγγίσεις δίνεται η δυνατότητα της βελτιστοποίησης της οδικής συμπεριφοράς λειτουργώντας ως γνώμονας για την κατάλληλη επιλογή των απαραίτητων ρυθμίσεων που συνήθως αυτού του τύπου τα οχήματα διαθέτουν.
Ως προτάσεις για μελλοντική έρευνα, ενδιαφέρουσα κρίνεται η διερεύνηση περισσότερων κατασκευαστικών μεγεθών όπως η μεταβολή του μεταξονίου και του μετατροχίου σε συνάρτηση με την κατακόρυφη κίνηση των τροχών, η επίδραση της θέσης του ίχνους στο πέλμα του ελαστικού και η διερεύνηση της αναλογίας μαζών και ροπών αδράνειας των αναρτώμενων και μη αναρτώμενων μελών του οχήματος. Επίσης, σημαντική κρίνεται η διερεύνηση της μεταβολής της ταχύτητας κίνησης οχήματος που κινείται σε καμπύλη τροχιά λόγω ξαφνικής χρήσης του συστήματος πέδησης. Σε επόμενες εργασίες θα ήταν σημαντική η διερεύνηση του συσχετισμού της υποστροφικής ή υπερστροφικής συμπεριφοράς με το χρόνο κίνησης οχήματος σε προκαθορισμένη πορεία. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να βελτιστοποιηθεί η συμπεριφορά οχήματος με κριτήριο το χρόνο. Τέλος όλα αυτά θα μπορούσαν να

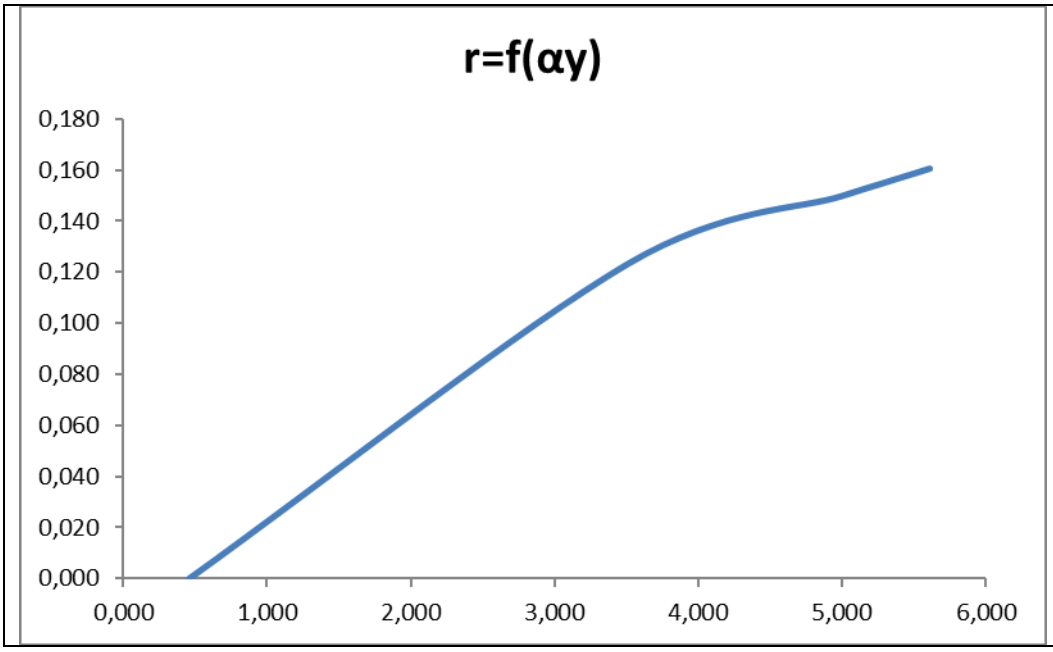
διερευνηθούν και στην περίπτωση των αγωνιστικών οχημάτων λαμβάνοντας όμως υπόψιν και κάποιες άλλες κατασκευαστικές αλλαγές που απαιτούνται εδώ όπως το διαφορικό περιορισμένης ολίσθησης (limited slip or locked differential).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

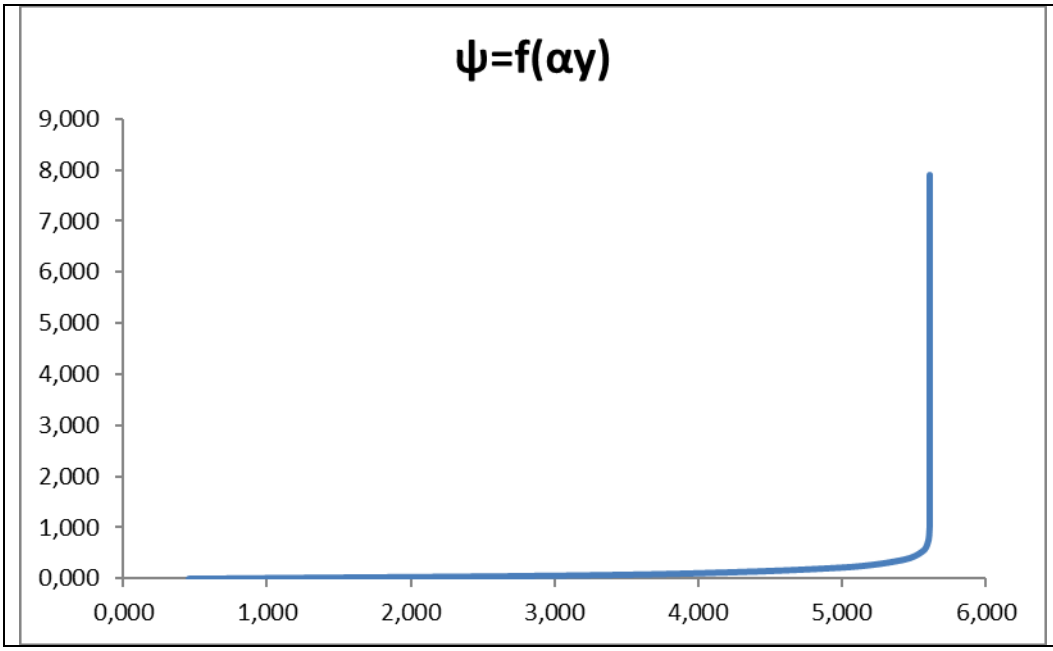
Α. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΠΛΕΥΡΙΚΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ



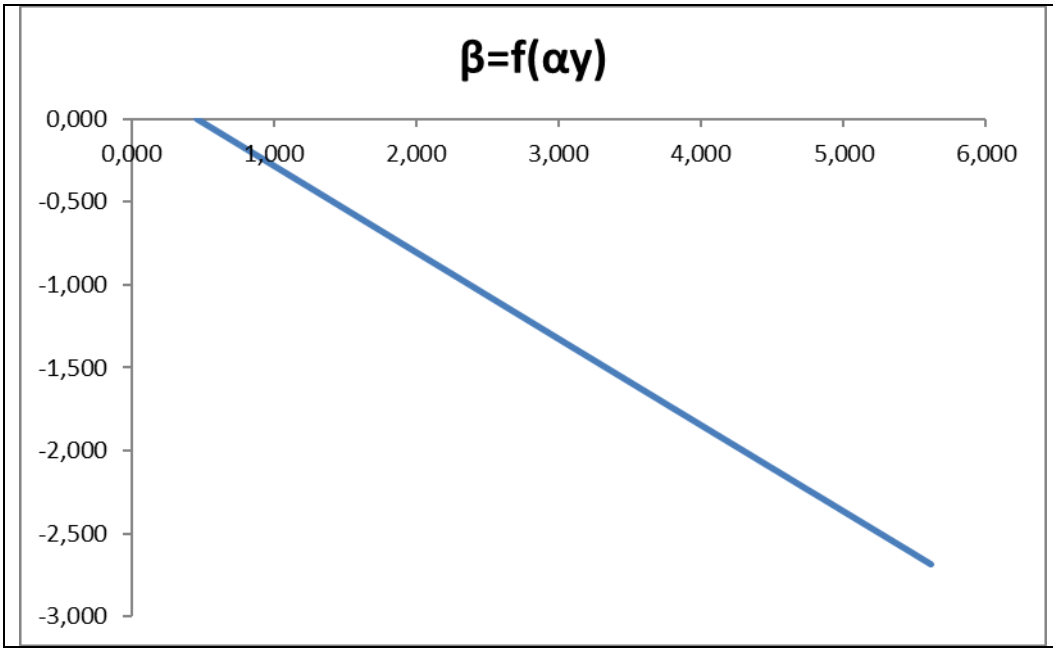
πλευρική ταχύτητα v συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης α_y



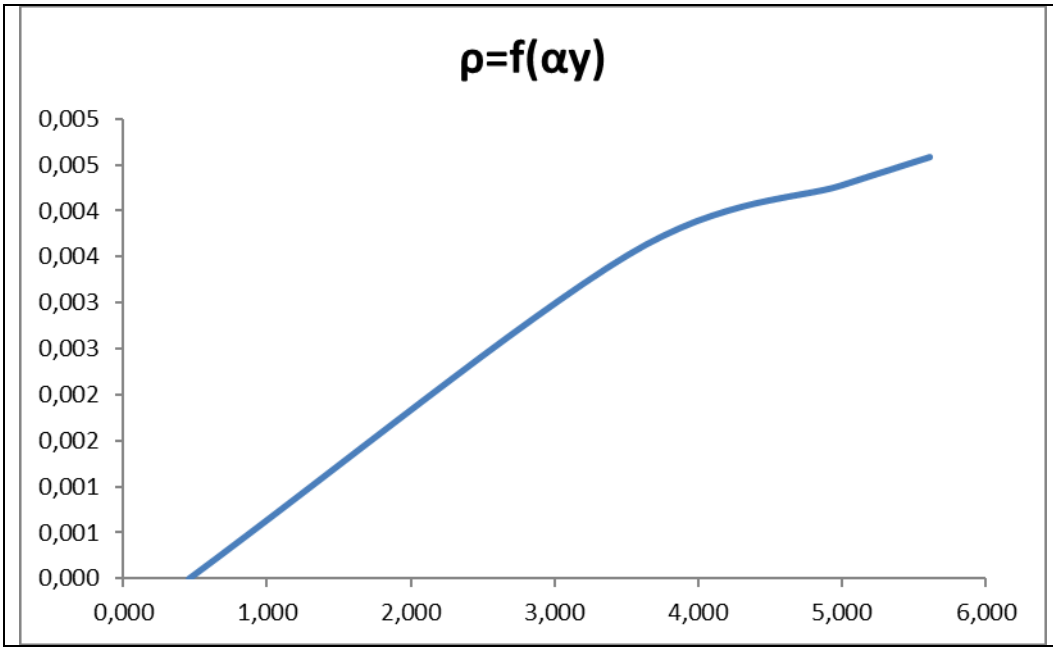
ρυθμός εκτροπής r συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης α_y



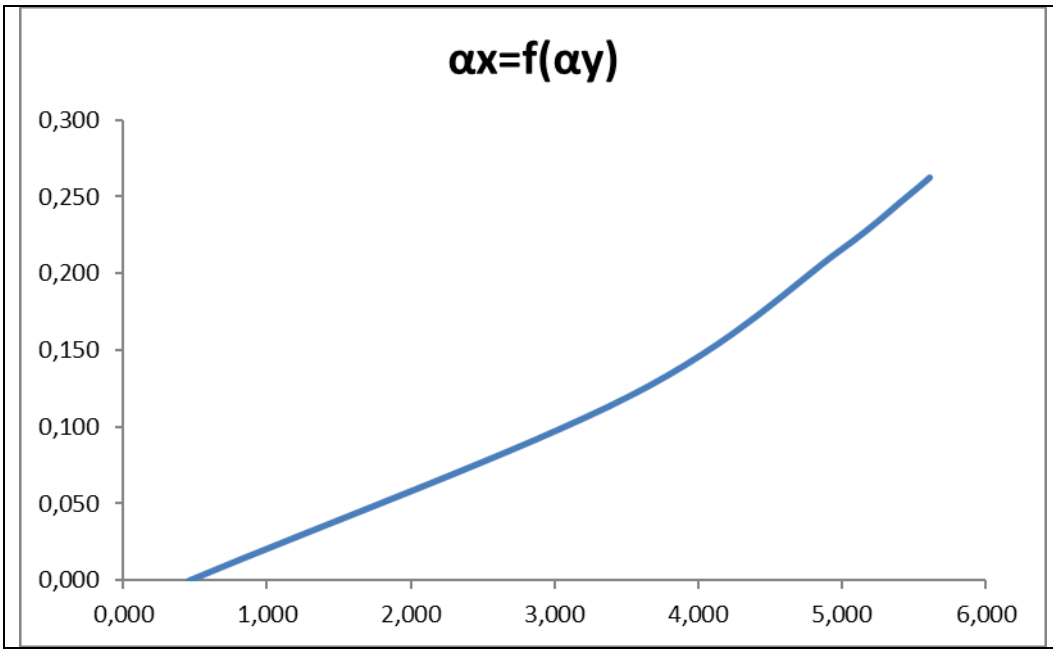
γωνία εκτροπής ψ συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης $α_y$



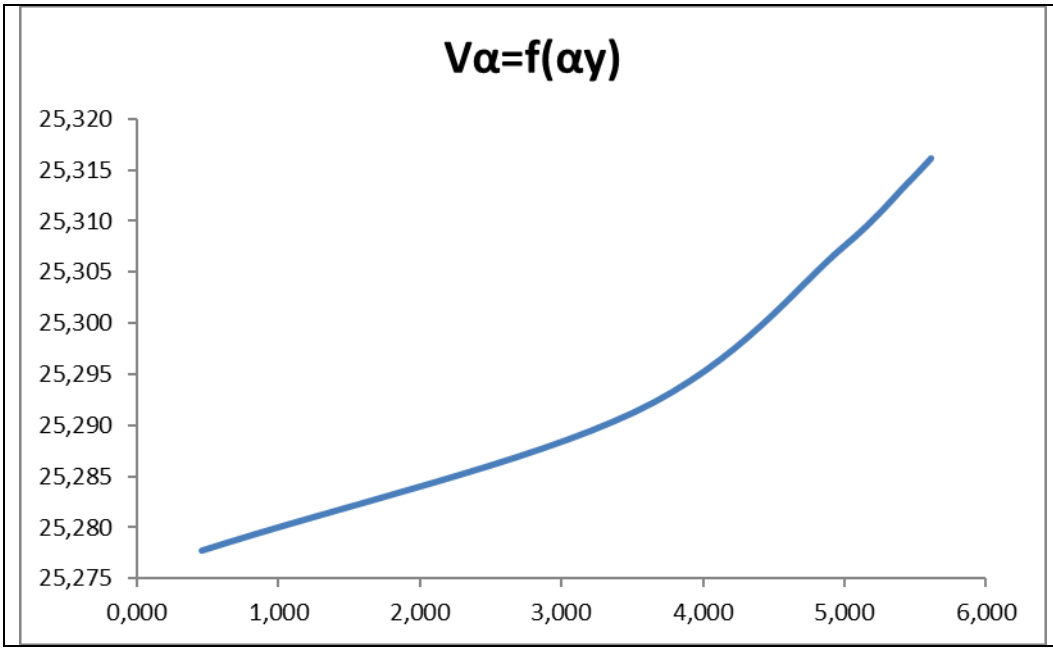
γωνία ολίσθησης β συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης $α_y$



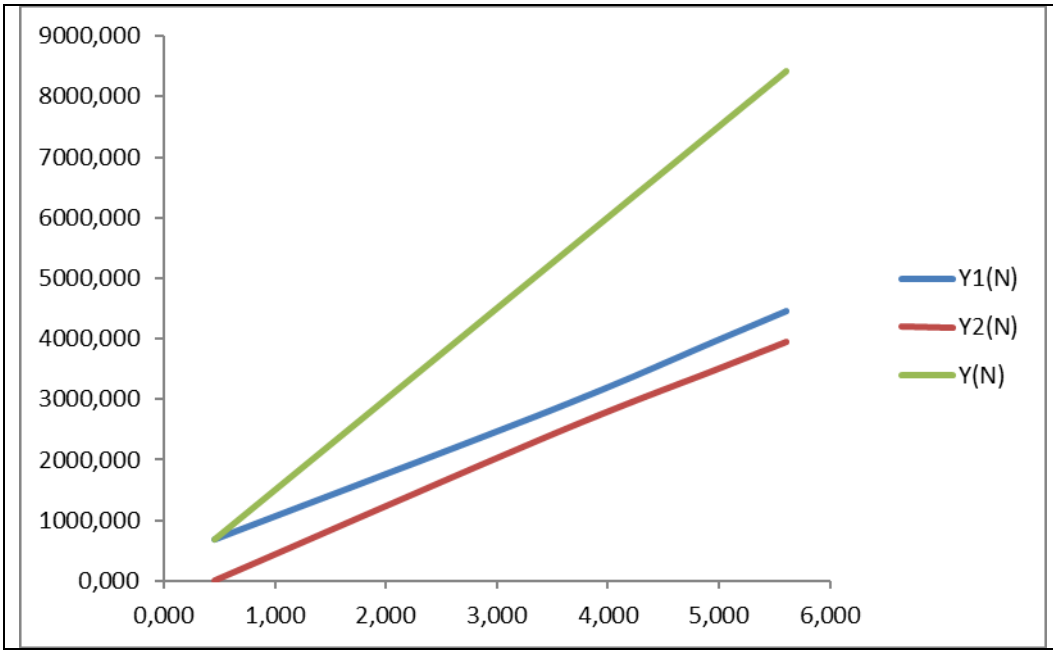
καμπυλότητα ρ συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης α_y



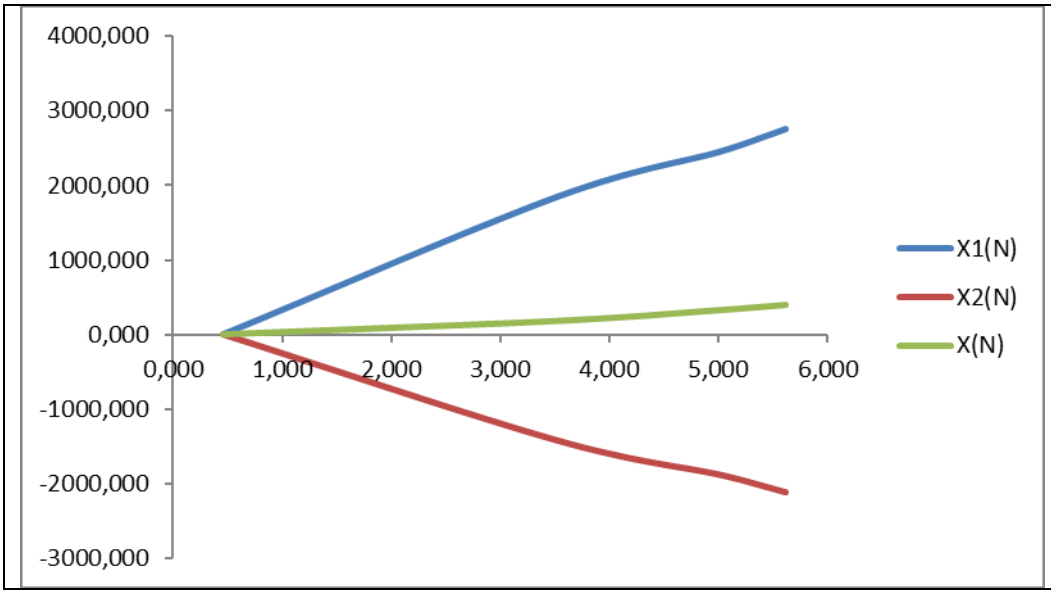
διαμήκης επιτάχυνση α_x συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης α_y



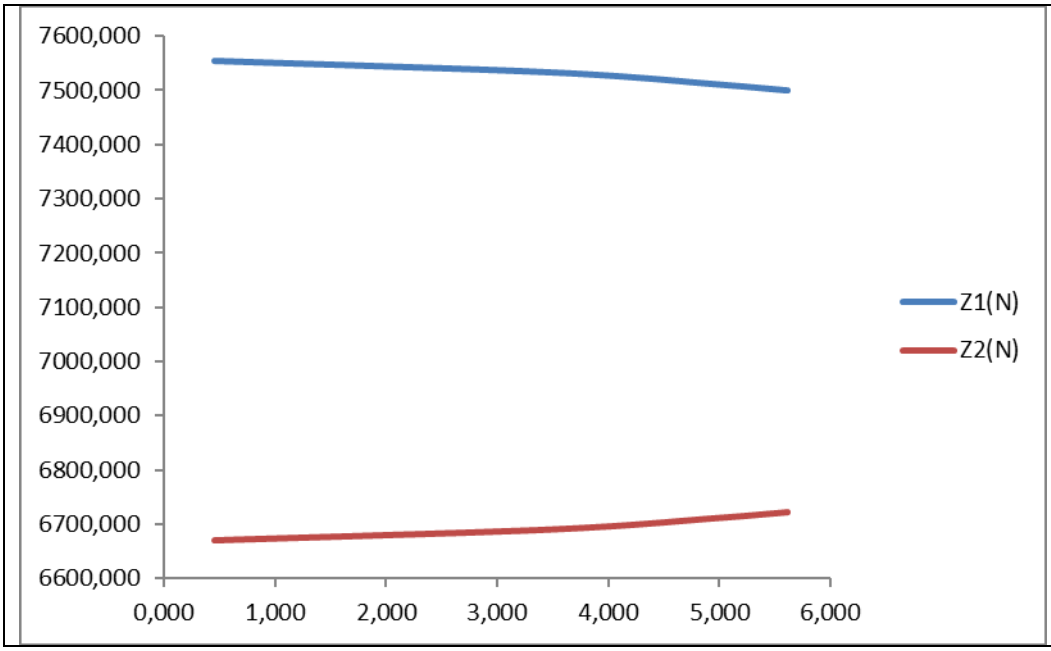
σχετική ταχύτητα μεταξύ οχήματος και αέρα $V_α$ συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης $α_y$



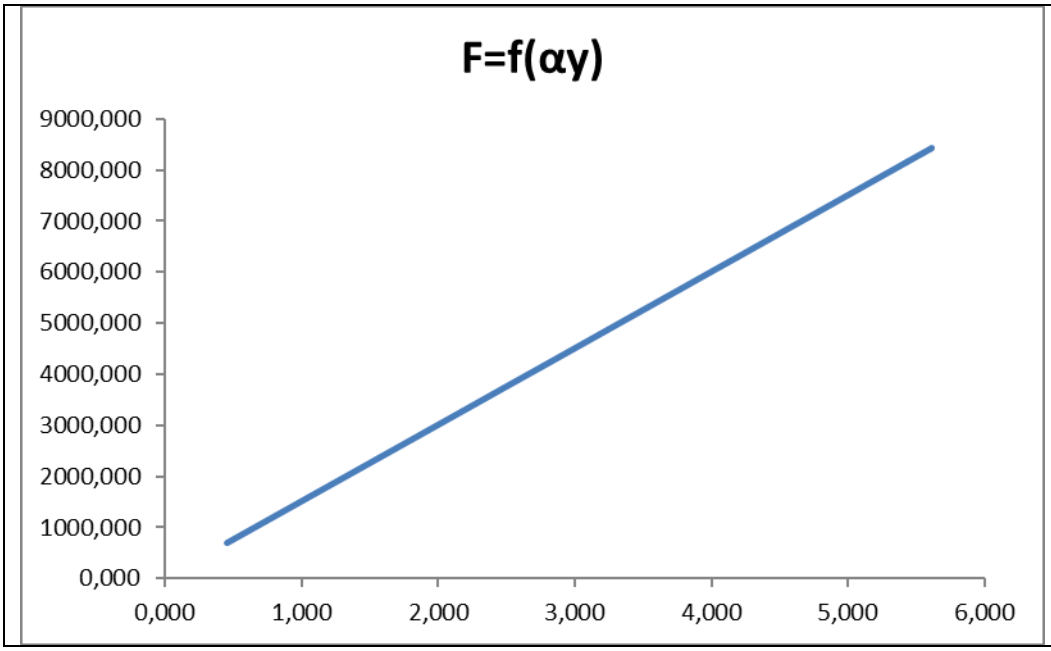
πλευρικές δυνάμεις Y_1, Y_2 και Y συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης $α_y$



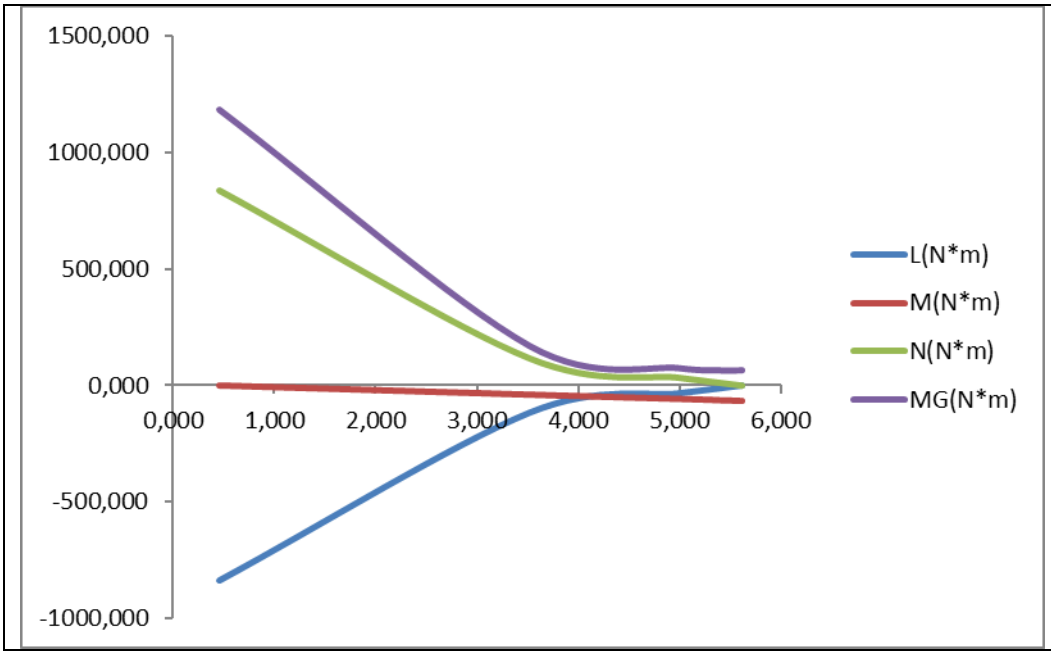
Διαμήκεις δυνάμεις στον άξονα x X_1, X_2 και X συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης α_y



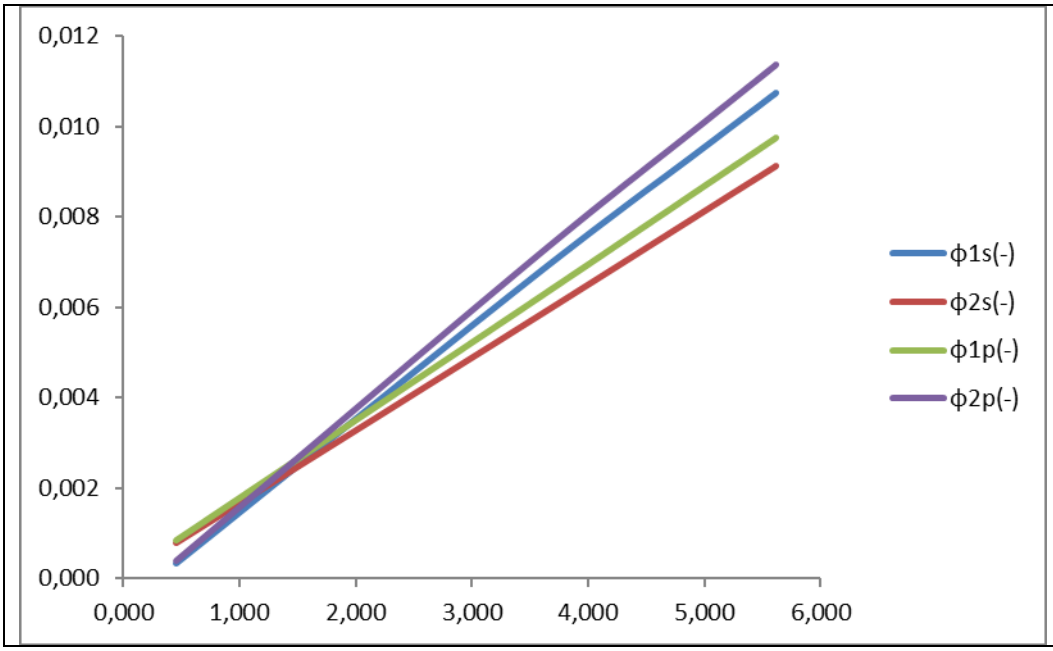
κατακόρυφες δυνάμεις στον άξονα z Z_1 και Z_2 συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης α_y



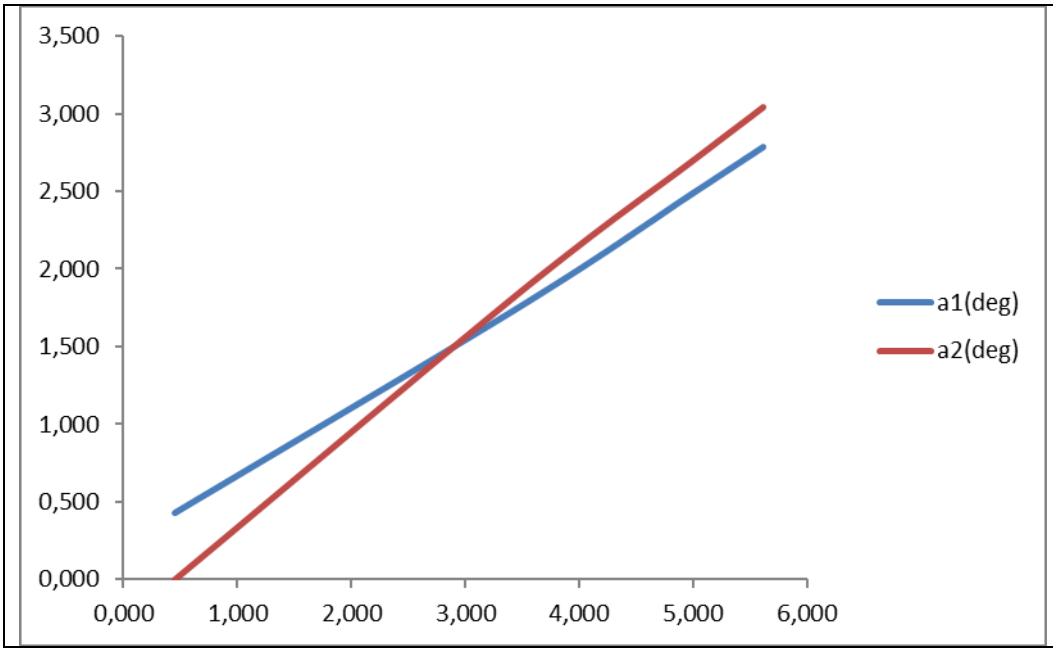
εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο όχημα F συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης α_y



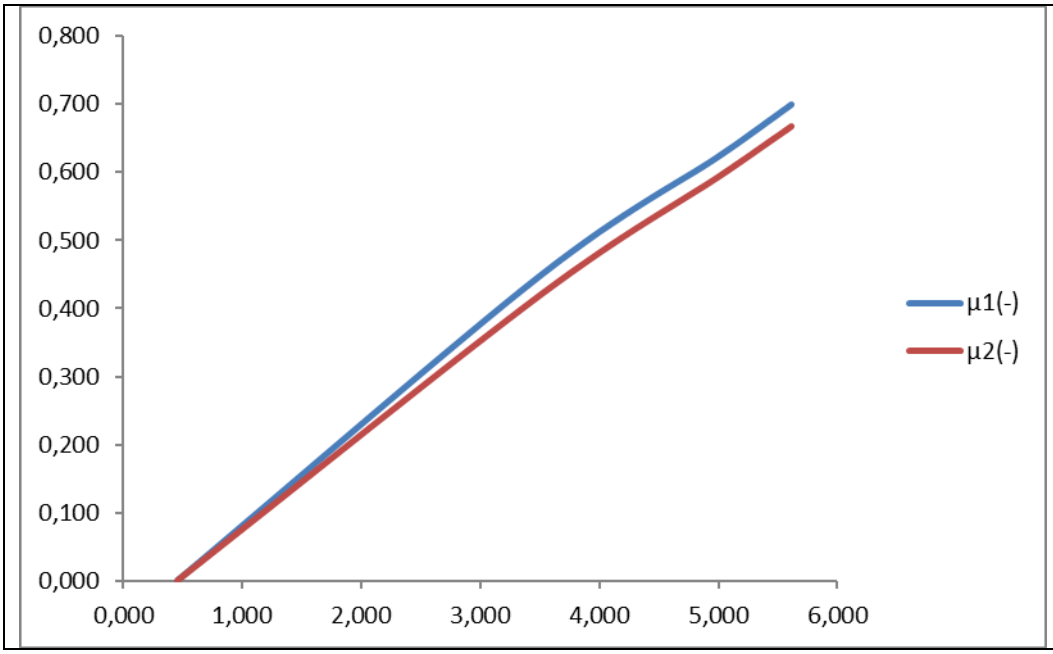
ροπές στο xyz συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης α_y



γωνίες περιστροφής (κλυδωνισμού) αμαξώματος φ συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης αy

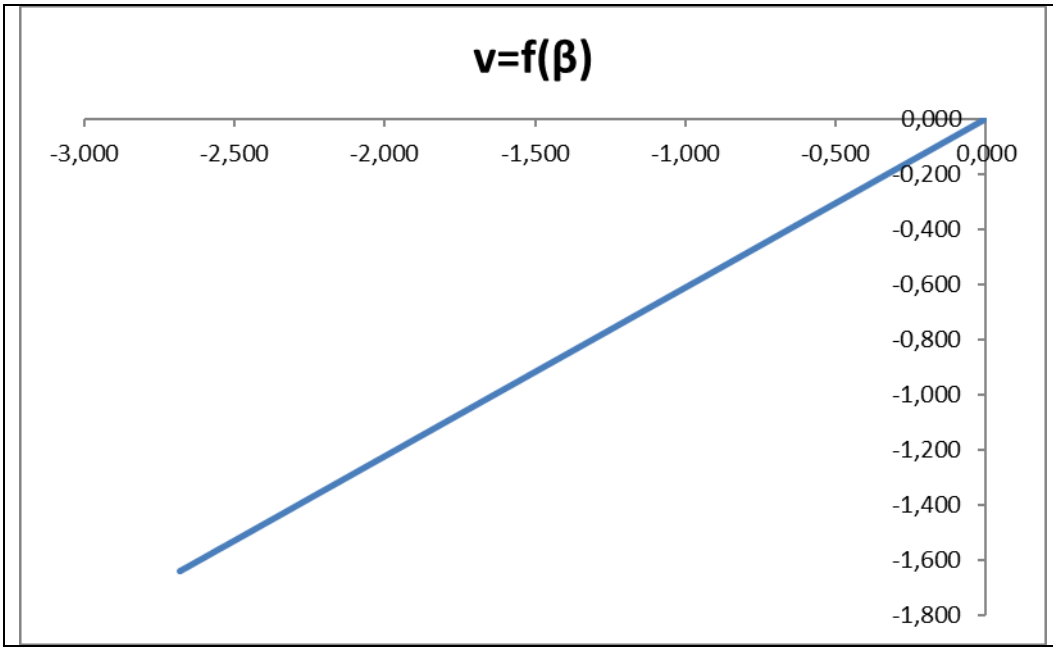


γωνίες ολίσθησης a_1 και a_2 συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης $α_y$

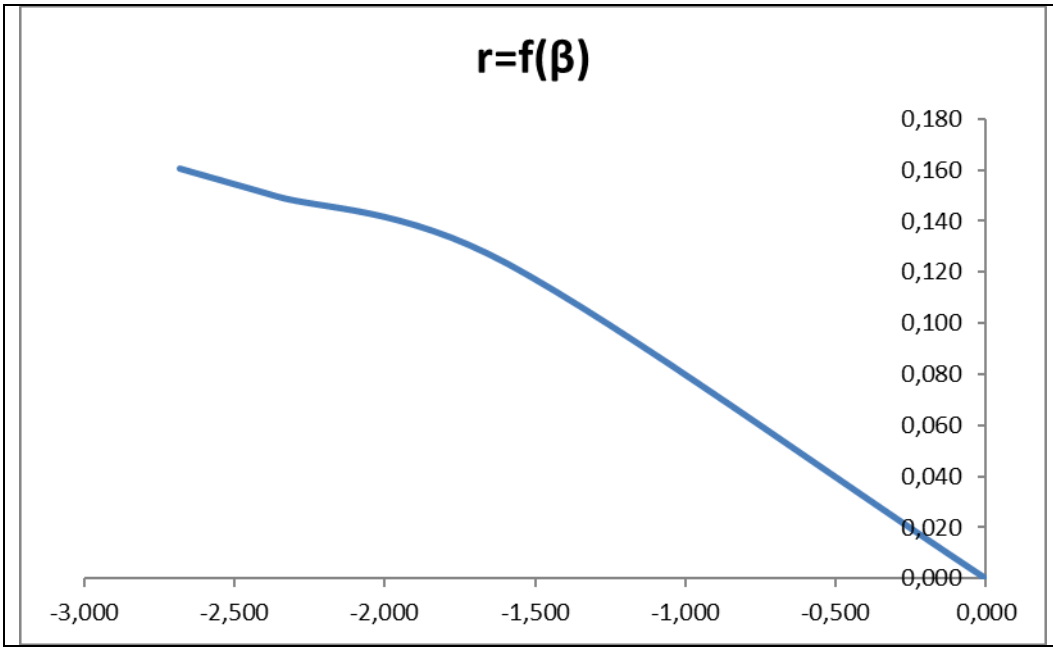


συντελεστές τριβής στο τροχό μ_1 και μ_2 συναρτήσει πλευρικής επιτάχυνσης α_y

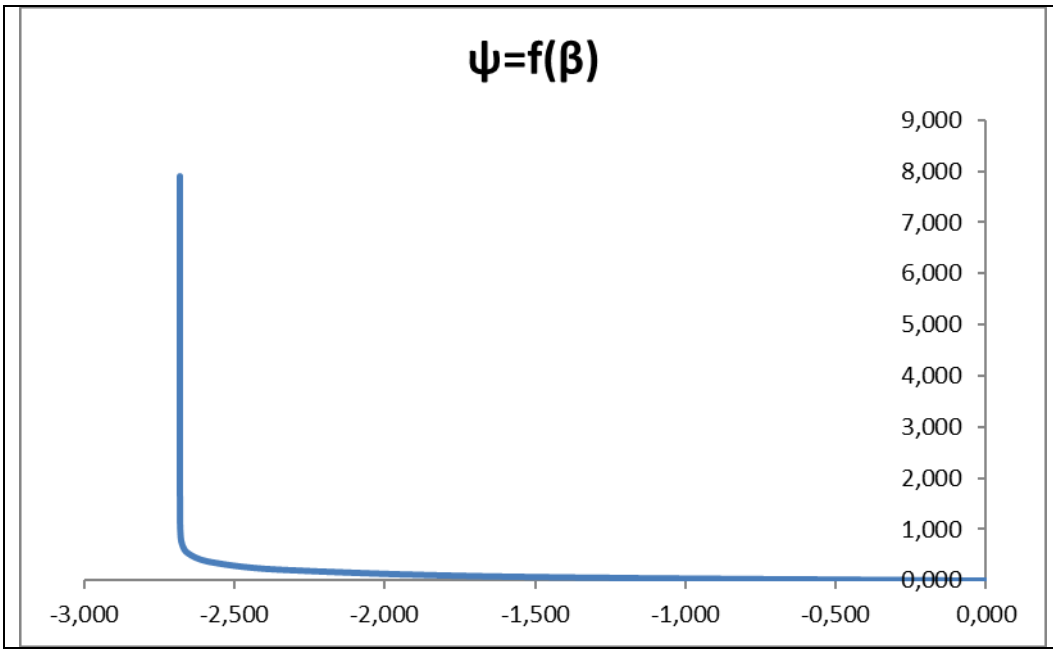
Β. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΓΩΝΙΑΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ



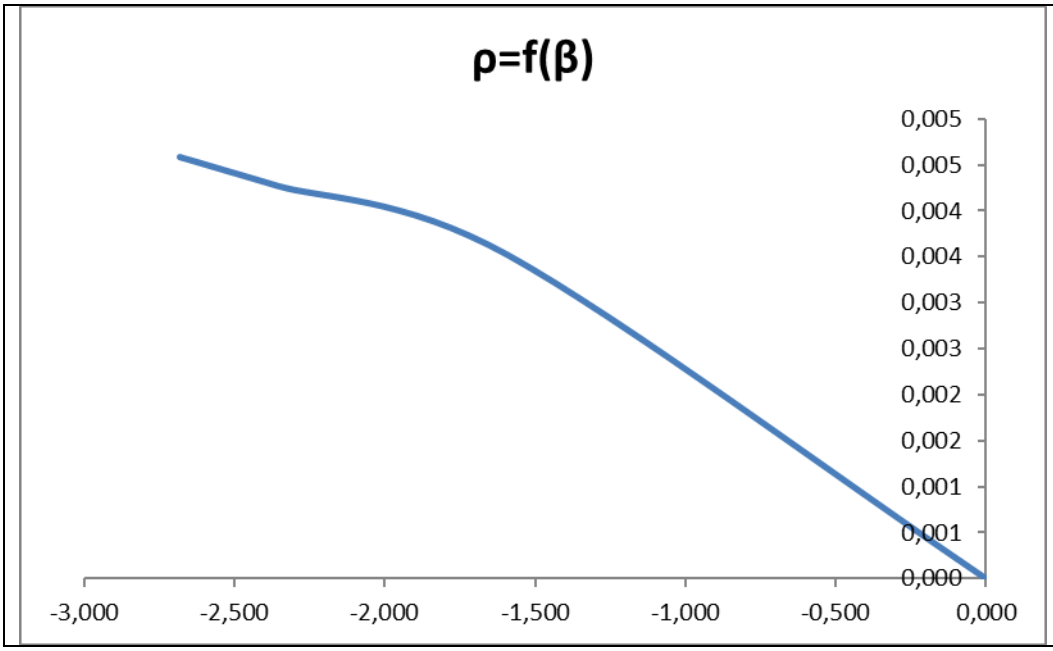
πλευρική ταχύτητα v συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



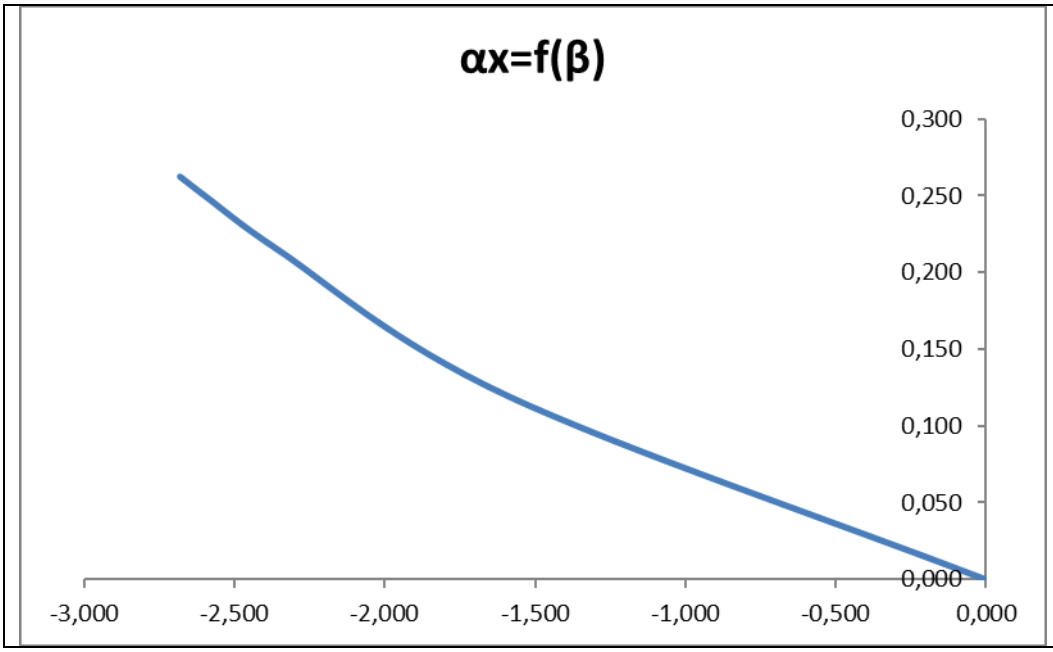
ρυθμός εκτροπής r συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



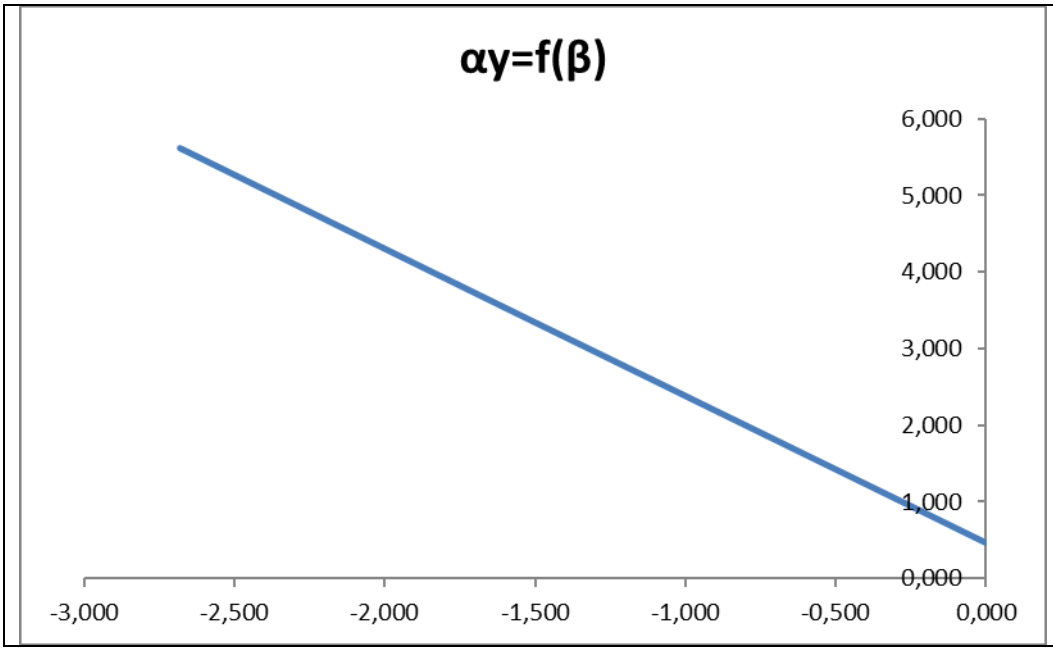
γωνία εκτροπής ψ συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



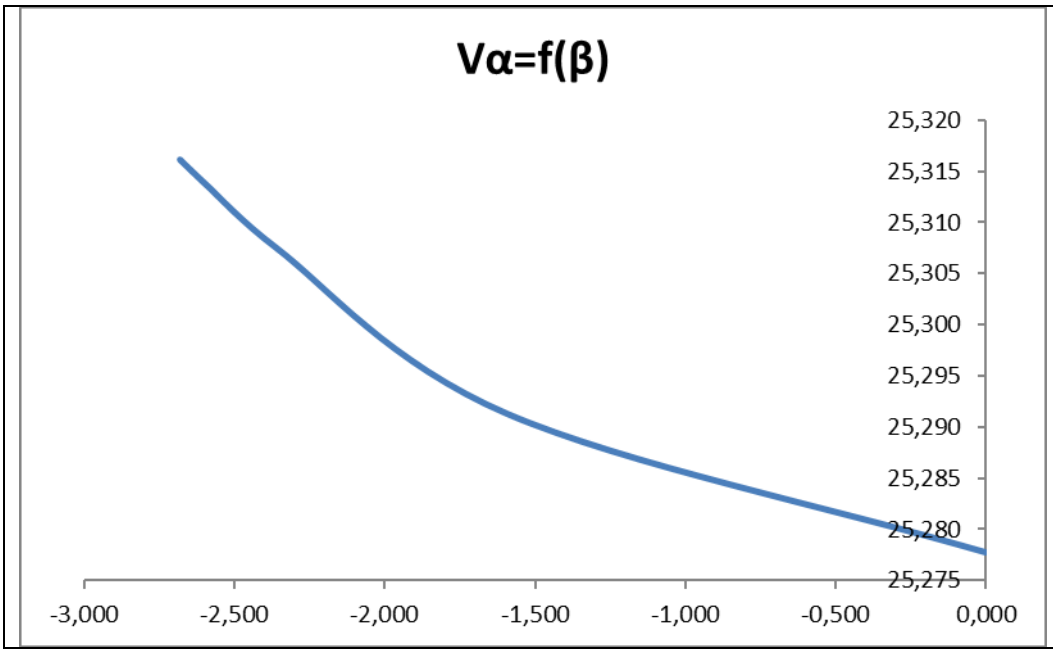
καμπυλότητα ρ συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



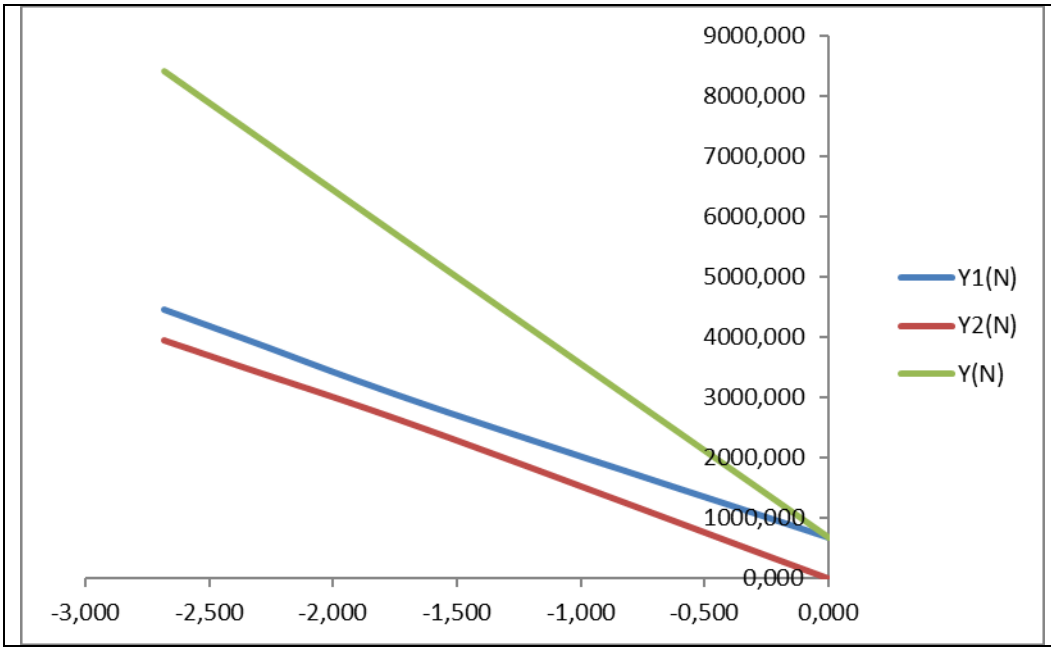
διαμήκης επιτάχυνση $α_x$ συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



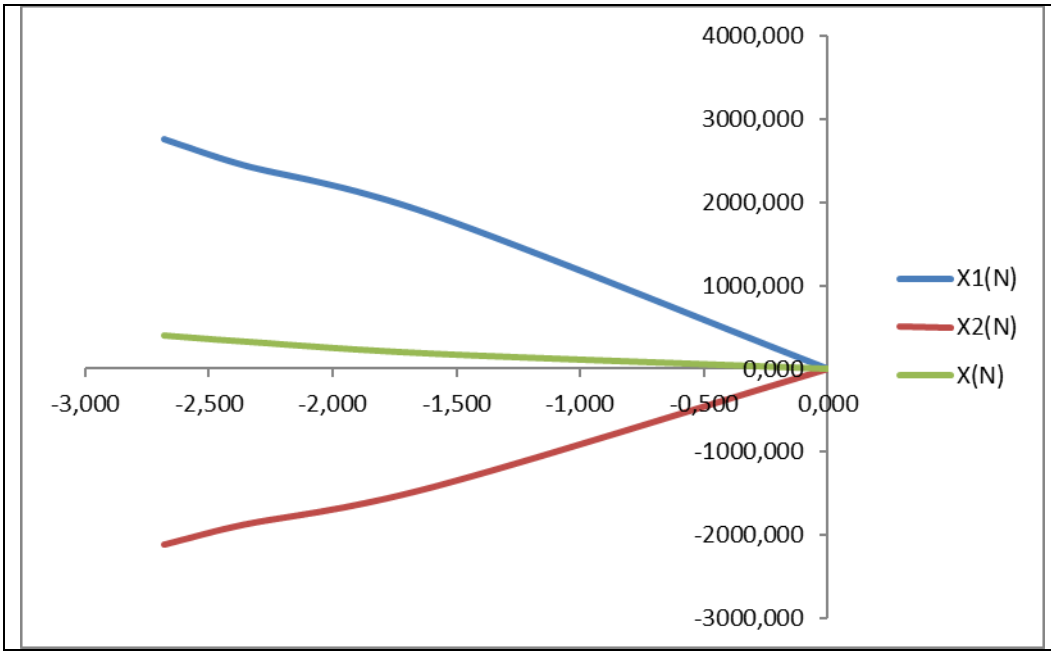
πλευρική επιτάχυνση α_y συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



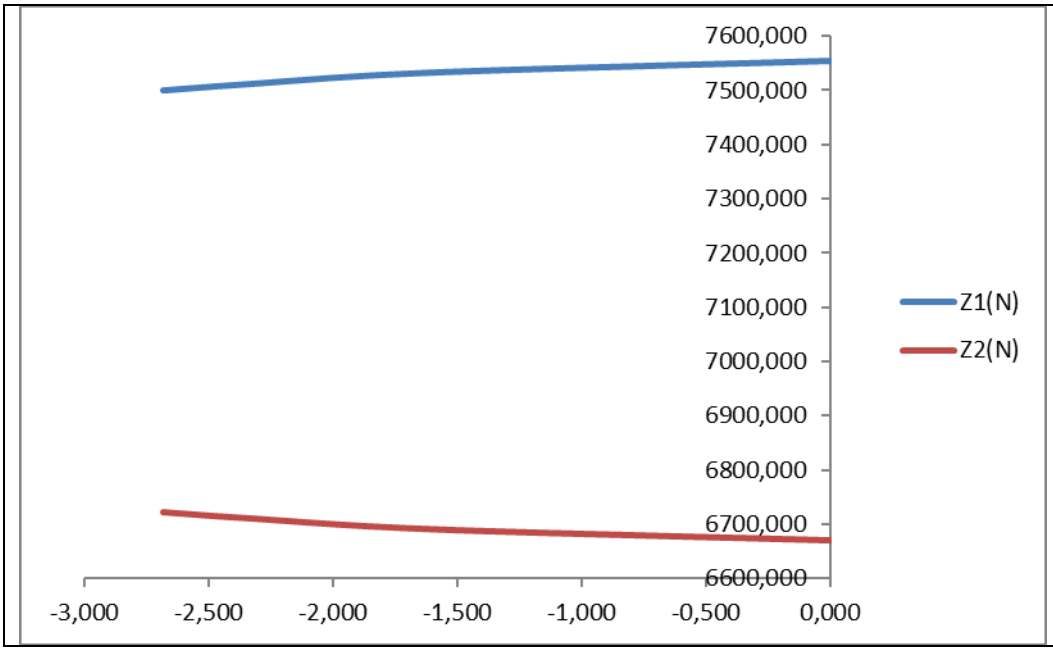
σχετική ταχύτητα μεταξύ οχήματος και αέρα V_α συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



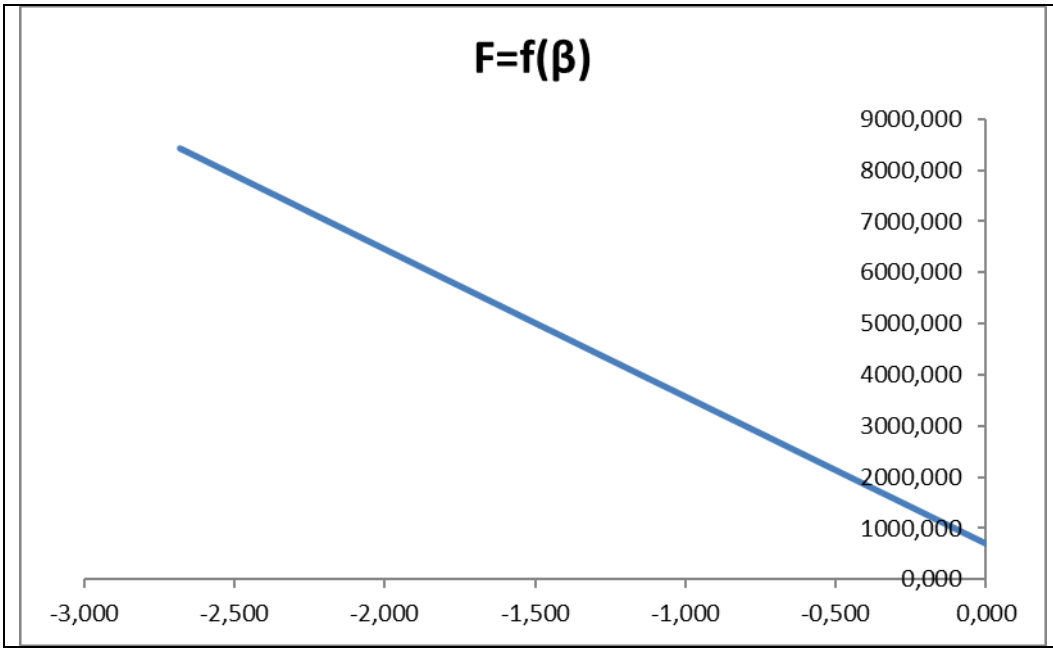
πλευρικές δυνάμεις Y_1, Y_2 και Y συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



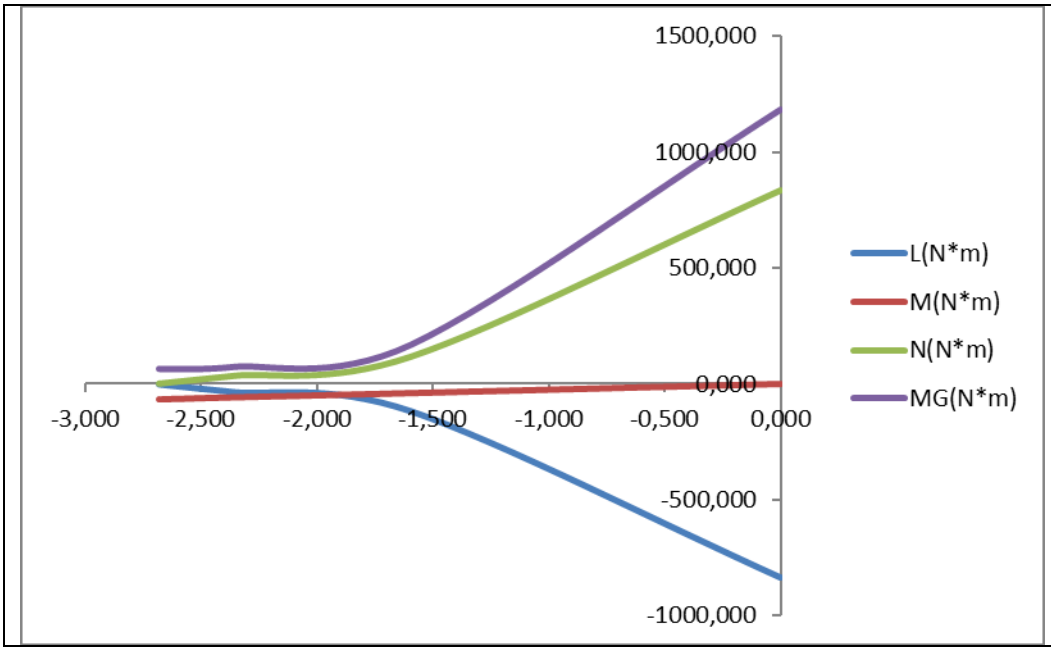
Διαμήκεις δυνάμεις στον άξονα x X_1, X_2 και X συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



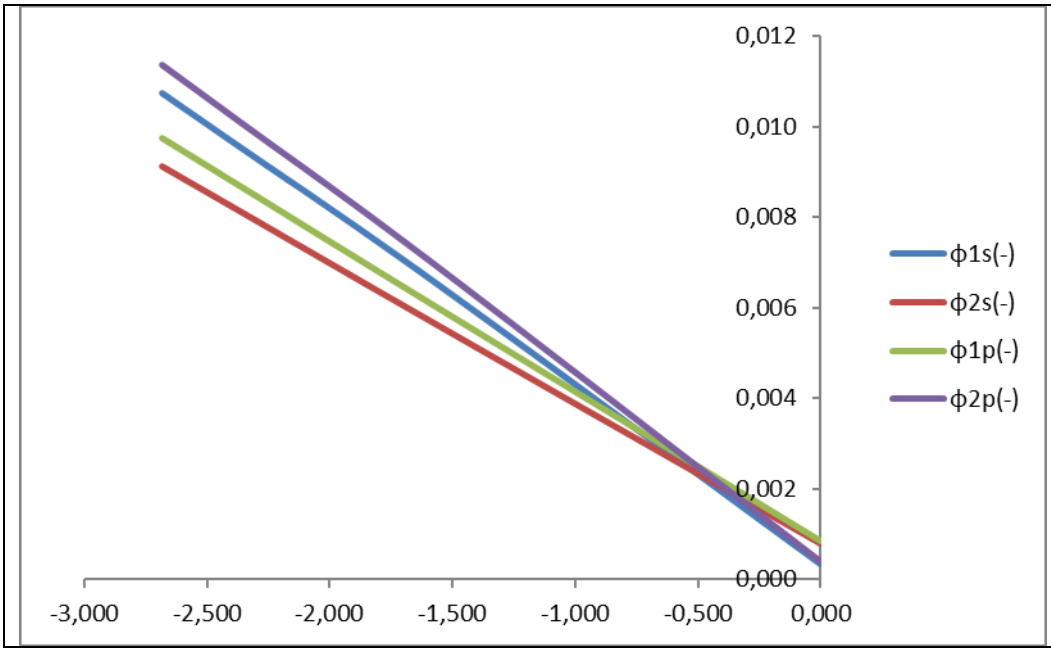
κατακόρυφες δυνάμεις στον άξονα z Z_1 και Z_2 συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



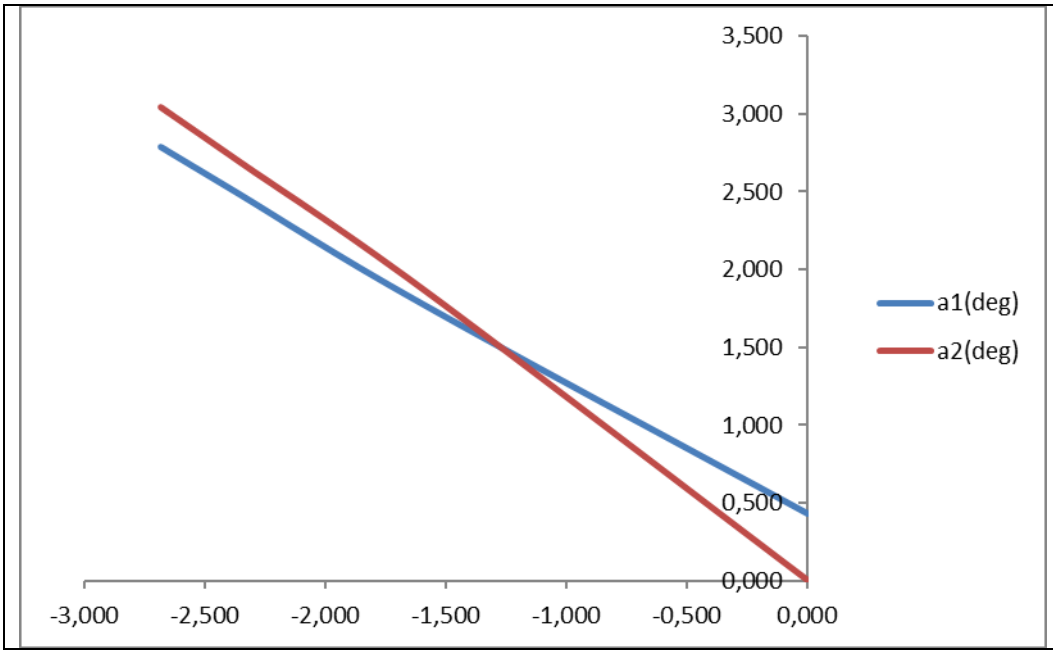
εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο όχημα F συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



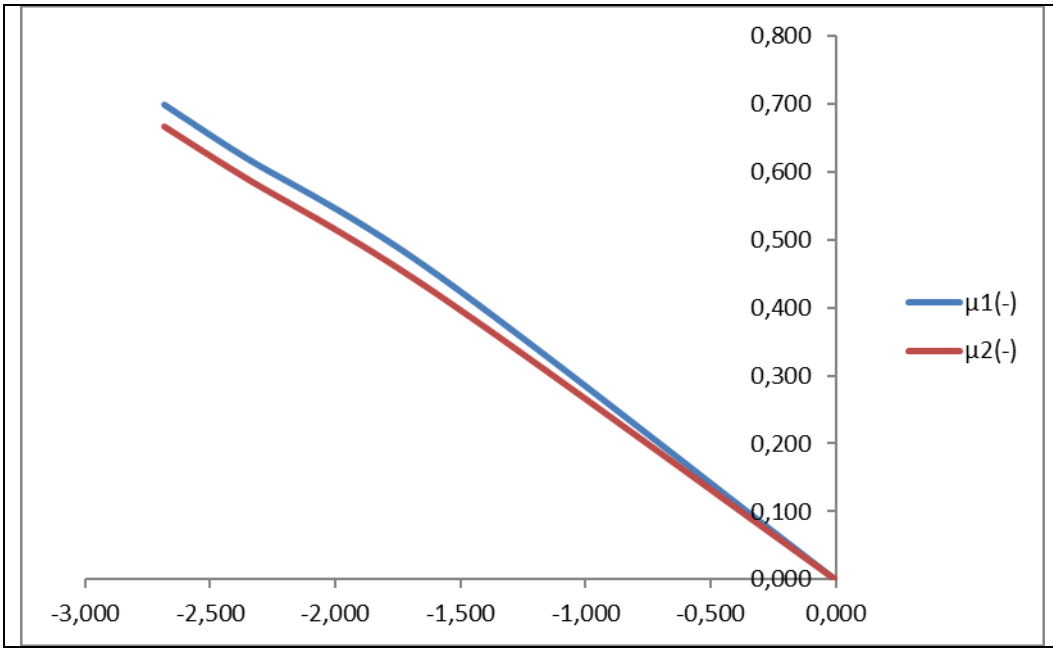
ροπές στο xyz συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



γωνίες περιστροφής (κλυδωνισμού) αμαξώματος φ συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



γωνίες ολίσθησης a_1 και a_2 συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β



συντελεστές τριβής στο τροχό μ_1 και μ_2 συναρτήσει γωνίας ολίσθησης β

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

Α. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΙΜΩΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

CRANK NICOLSON VS ANALYTICAL METHOD	RUNGE KUTTA VS ANALYTICAL METHOD	EXPLICIT FORWARD VS ANALYTICAL METHOD		
#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		πλευρική ταχύτητα v συναρτήσει του χρόνου
-0,0191%	-0,0191%	0,0127%		
-0,0001%	-0,0001%	0,0001%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		

CRANK NICOLSON VS ANALYTICAL METHOD	RUNGE KUTTA VS ANALYTICAL METHOD	EXPLICIT FORWARD VS ANALYTICAL METHOD		
#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		ρυθμός εκτροπής r συναρτήσει του χρόνου
-0,0119%	-0,0119%	0,0051%		
-0,0001%	-0,0001%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		
0,0000%	0,0000%	0,0000%		

CRANK NICOLSON VS ANALYTICAL METHOD	RUNGE KUTTA VS ANALYTICAL METHOD	EXPLICIT FORWARD VS ANALYTICAL METHOD		
#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		γωνία εκτροπής ψ συναρτήσει του χρόνου
-0,2294%	-0,2298%	0,0212%		
-0,1074%	-0,1076%	0,0104%		
-0,0699%	-0,0700%	0,0067%		
-0,0518%	-0,0519%	0,0050%		
-0,0411%	-0,0412%	0,0040%		
-0,0341%	-0,0342%	0,0033%		
-0,0291%	-0,0292%	0,0028%		
-0,0254%	-0,0255%	0,0025%		
-0,0226%	-0,0226%	0,0022%		
-0,0203%	-0,0203%	0,0020%		

CRANK NICOLSON VS ANALYTICAL METHOD	RUNGE KUTTA VS ANALYTICAL METHOD	EXPLICIT FORWARD VS ANALYTICAL METHOD	
#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	Γωνία ολίσθησης β συναρτήσει του χρόνου
-0,0916%	-0,0916%	-0,0599%	
-0,0731%	-0,0731%	-0,0729%	
-0,0730%	-0,0730%	-0,0730%	
-0,0730%	-0,0730%	-0,0730%	
-0,0730%	-0,0730%	-0,0730%	
-0,0730%	-0,0730%	-0,0730%	
-0,0730%	-0,0730%	-0,0730%	
-0,0730%	-0,0730%	-0,0730%	
-0,0730%	-0,0730%	-0,0730%	

CRANK NICOLSON VS ANALYTICAL METHOD	RUNGE KUTTA VS ANALYTICAL METHOD	EXPLICIT FORWARD VS ANALYTICAL METHOD	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	γωνία ολίσθησης α_1 συναρτήσει του χρόνου
-0,0170%	-0,0170%	0,0116%	
-0,0001%	-0,0001%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	

CRANK NICOLSON VS NALYTICAL METHOD	RUNGE KUTTA VS ANALYTICAL METHOD	EXPLICIT FORWARD VS ANALYTICAL METHOD	
#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	γωνία ολίσθησης α_2 συναρτήσει του χρόνου
-0,0182%	-0,0182%	0,0118%	
-0,0001%	-0,0001%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	
0,0000%	0,0000%	0,0000%	

CRANK NICOLSON VS ANALYTICAL METHOD		RUNGE KUTTA VS ANALYTICAL METHOD		EXPLICIT FORWARD VS ANALYTICAL METHOD			
x(m)	y(m)	x(m)	y(m)	x(m)	y(m)		
#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		συντεταγμένες x και y τροχιάς
0,0045%	0,0000%	0,0046%	-0,0008%	-0,0356%	0,3518%		
0,1938%	0,0000%	0,1940%	-0,0003%	0,0644%	0,1607%		
0,2657%	0,0000%	0,2662%	-0,0001%	-0,0342%	0,0641%		
1,2333%	0,0000%	1,2354%	0,0000%	-0,1578%	-0,0080%		
-0,4928%	0,0000%	-0,4938%	0,0001%	0,1203%	-0,0830%		
0,3878%	0,0000%	0,3874%	0,0003%	0,6013%	-0,1945%		
0,4509%	0,0000%	0,4508%	0,0006%	0,5392%	-0,4865%		
-2,7097%	0,0000%	-2,7097%	0,0005%	-2,6677%	-3,8910%		
-0,3250%	0,0000%	-0,3250%	-0,0006%	-0,3777%	0,3078%		
0,3230%	0,0000%	0,3233%	-0,0003%	0,1749%	0,1414%		

Β. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΙΜΩΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

RUNGE KUTTA VS EXPLICIT FORWARD METHOD		
#DIV/0!		πλευρική ταχύτητα v συναρτήσει του χρόνου
0,0084%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		

RUNGE KUTTA VS EXPLICIT FORWARD METHOD		
#DIV/0!		ρυθμός εκτροπής r συναρτήσει του χρόνου
0,0030%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		

RUNGE KUTTA VS EXPLICIT FORWARD METHOD		
#DIV/0!		γωνία εκτροπής ψ συναρτήσει του χρόνου
0,2450%		
0,1197%		
0,0792%		
0,0591%		
0,0472%		
0,0393%		
0,0336%		
0,0294%		
0,0261%		
0,0235%		

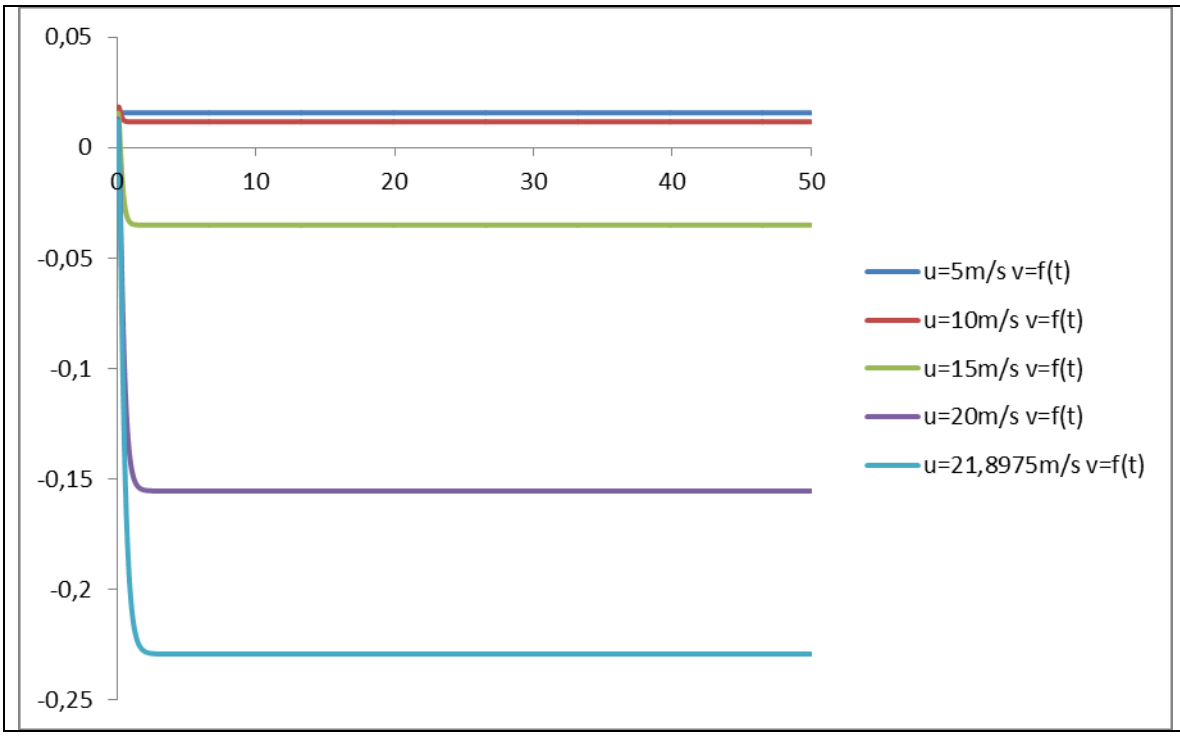
RUNGE KUTTA VS EXPLICIT FORWARD METHOD		
#DIV/0!		Γωνία ολίσθησης β συναρτήσει του χρόνου
0,0084%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		

RUNGE KUTTA VS EXPLICIT FORWARD METHOD		
0,0000%		γωνία ολίσθησης α_1 συναρτήσει του χρόνου
0,0046%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		

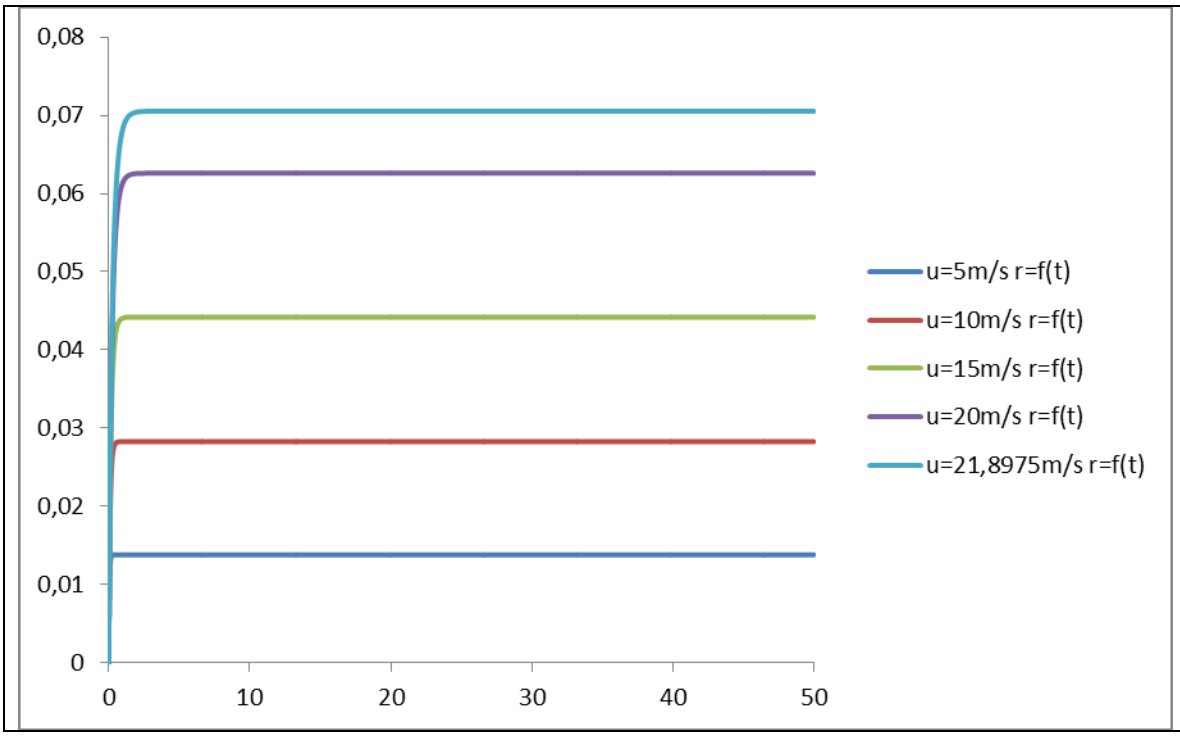
RUNGE KUTTA VS EXPLICIT FORWARD METHOD		γωνία ολίσθησης α_2 συναρτήσει του χρόνου
#DIV/0!		
0,0061%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		
0,0000%		

RUNGE KUTTA VS EXPLICIT FORWARD METHOD			συντεταγμένες x και y τροχιάς
#DIV/0!	#DIV/0!		
-0,5225%	0,2503%		
1,4681%	-0,2385%		
0,0293%	-2,8998%		
-0,3746%	0,3474%		
3,1936%	-0,1547%		
0,1609%	-1,5410%		
-0,2601%	0,4648%		
-0,0475%	-0,0791%		
0,2716%	-0,9951%		
-0,1627%	0,6087%		

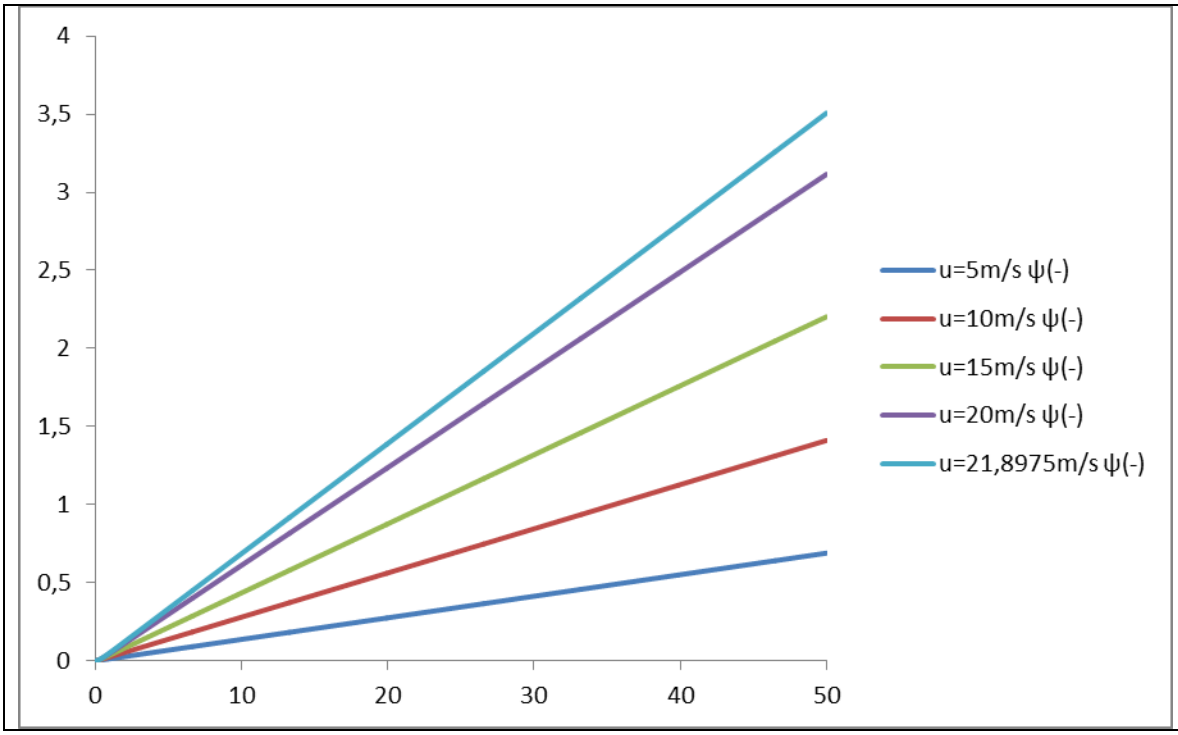
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΜΠΡΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ



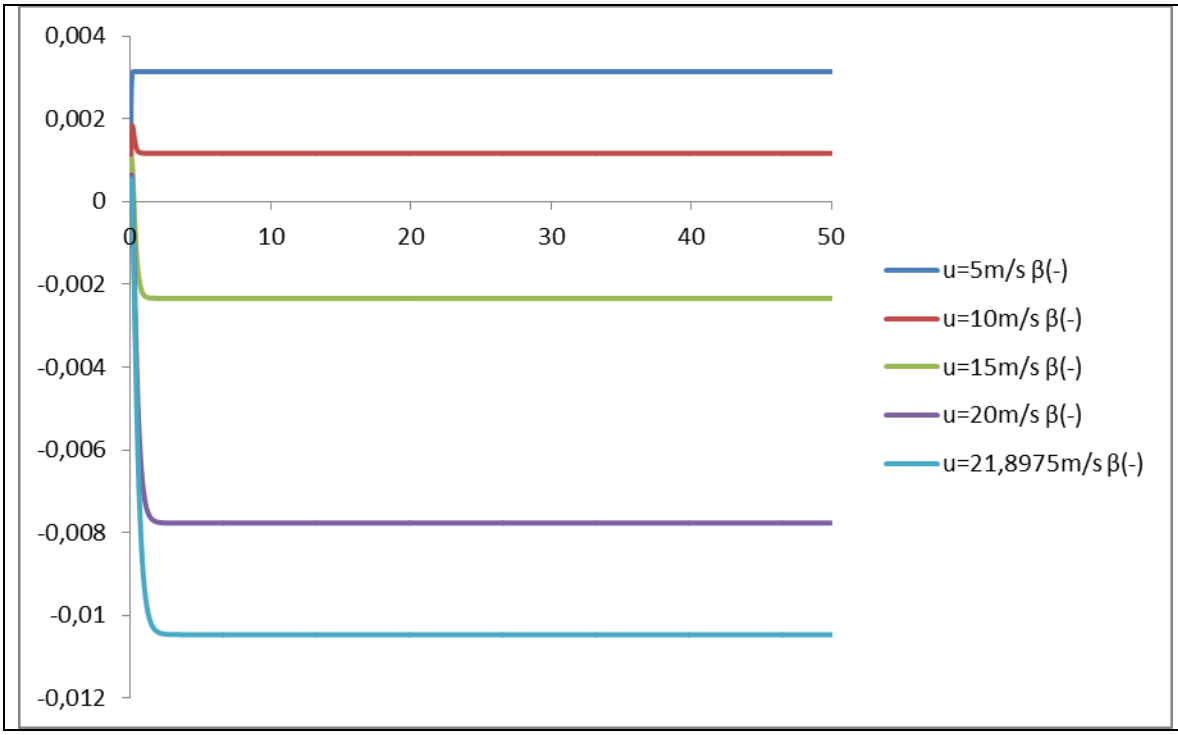
πλευρική ταχύτητα v συναρτήσει του χρόνου



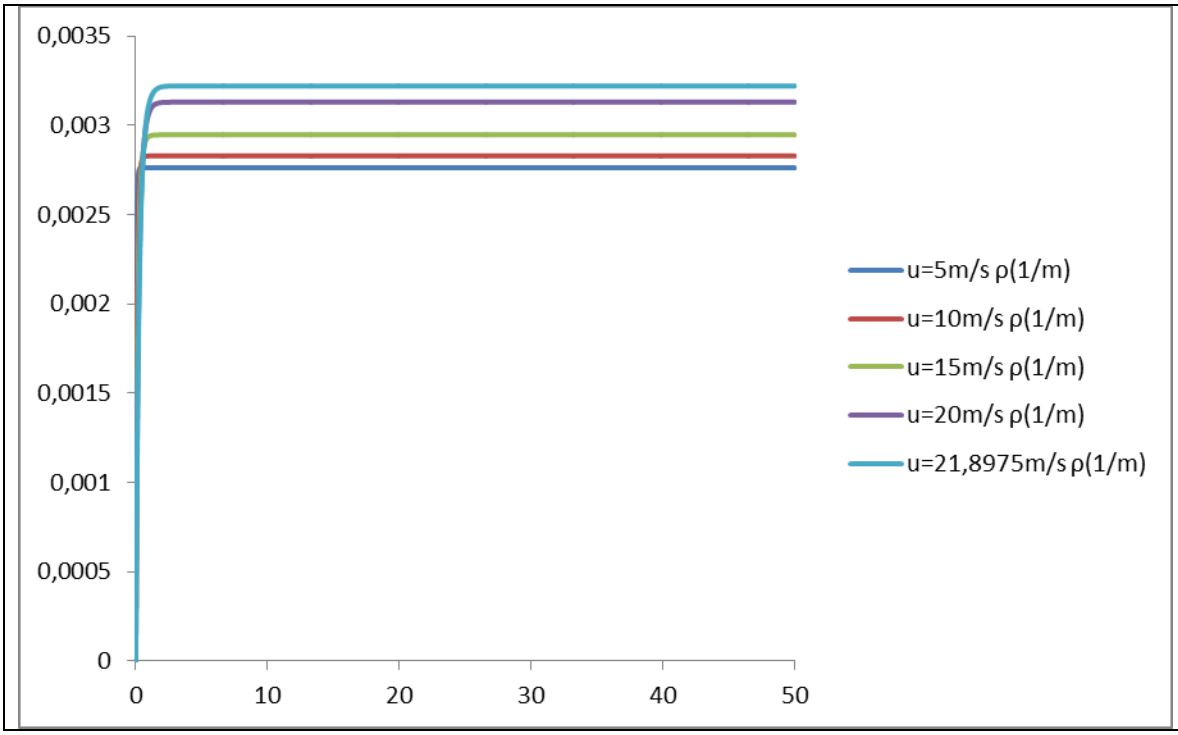
ρυθμός εκτροπής r συναρτήσει του χρόνου



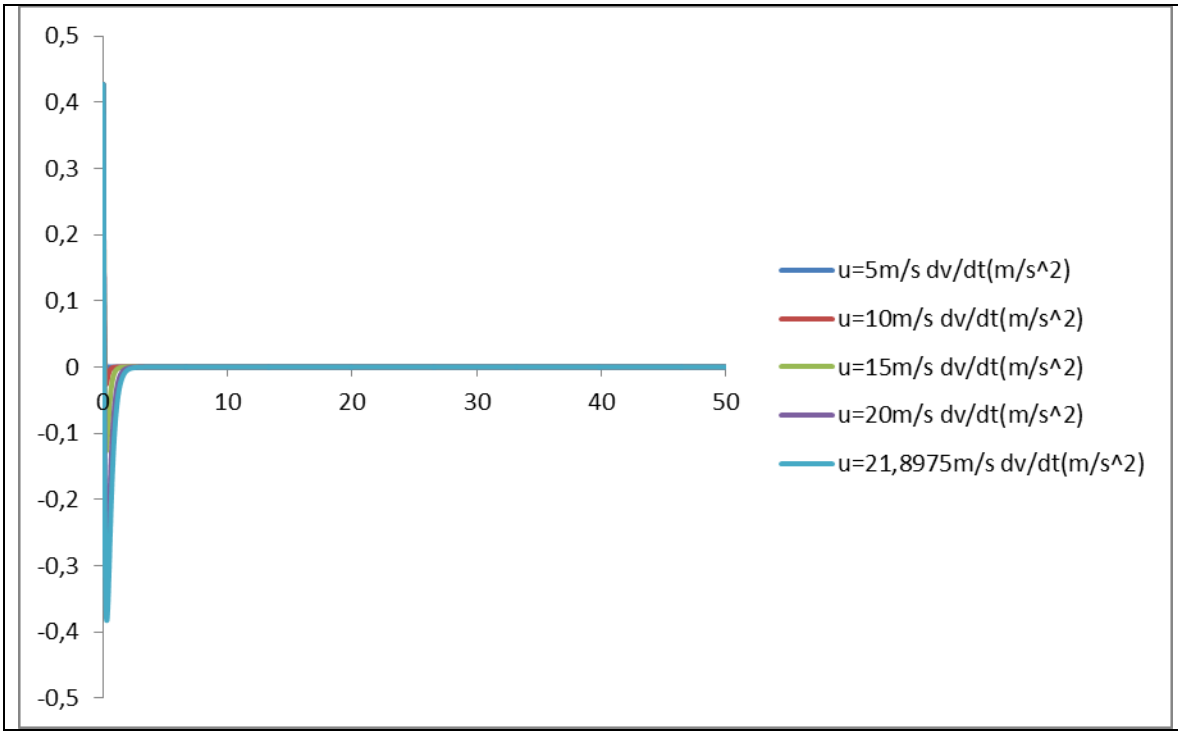
γωνία εκτροπής ψ συναρτήσει του χρόνου



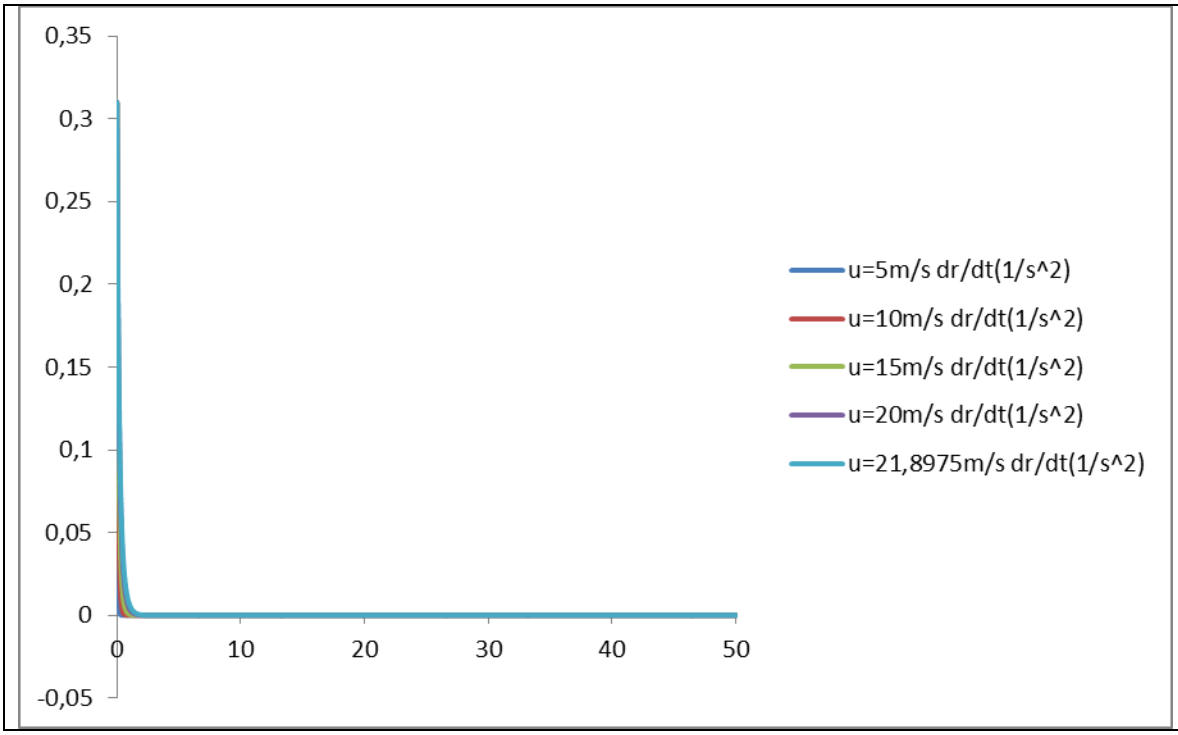
Γωνία ολίσθησης β συναρτήσει του χρόνου



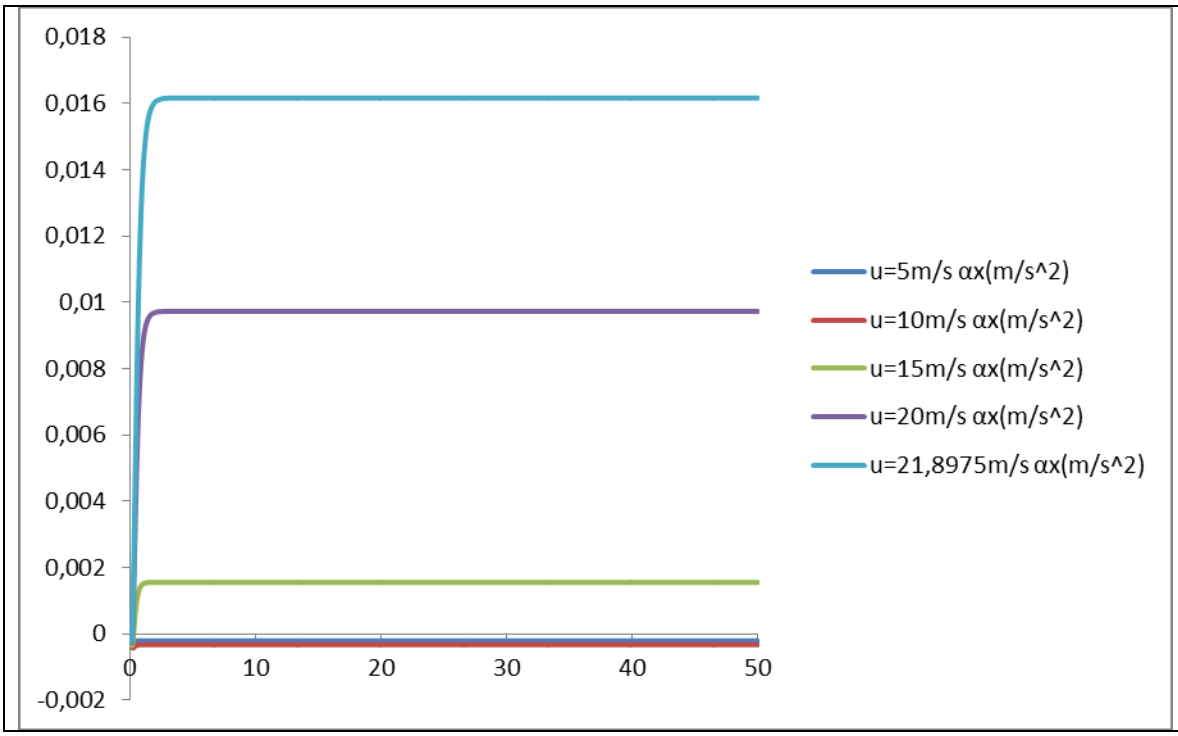
καμπυλότητα ρ συναρτήσει του χρόνου



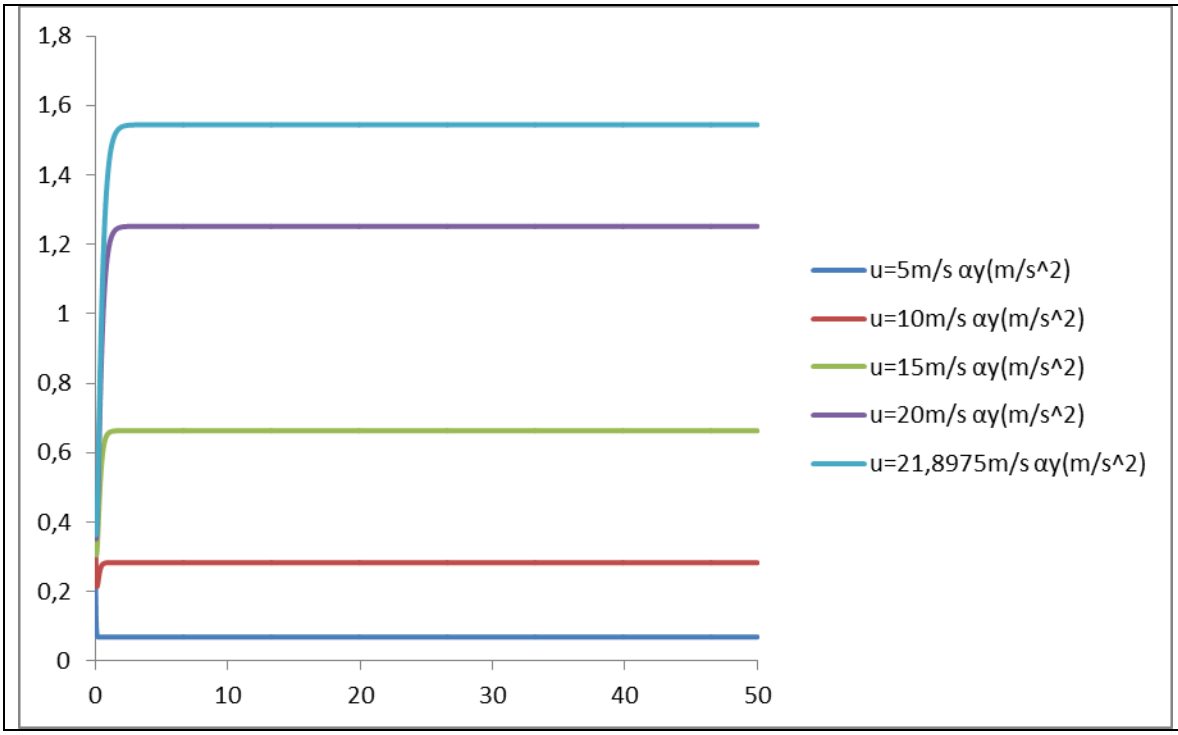
Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας v συναρτήσει του χρόνου



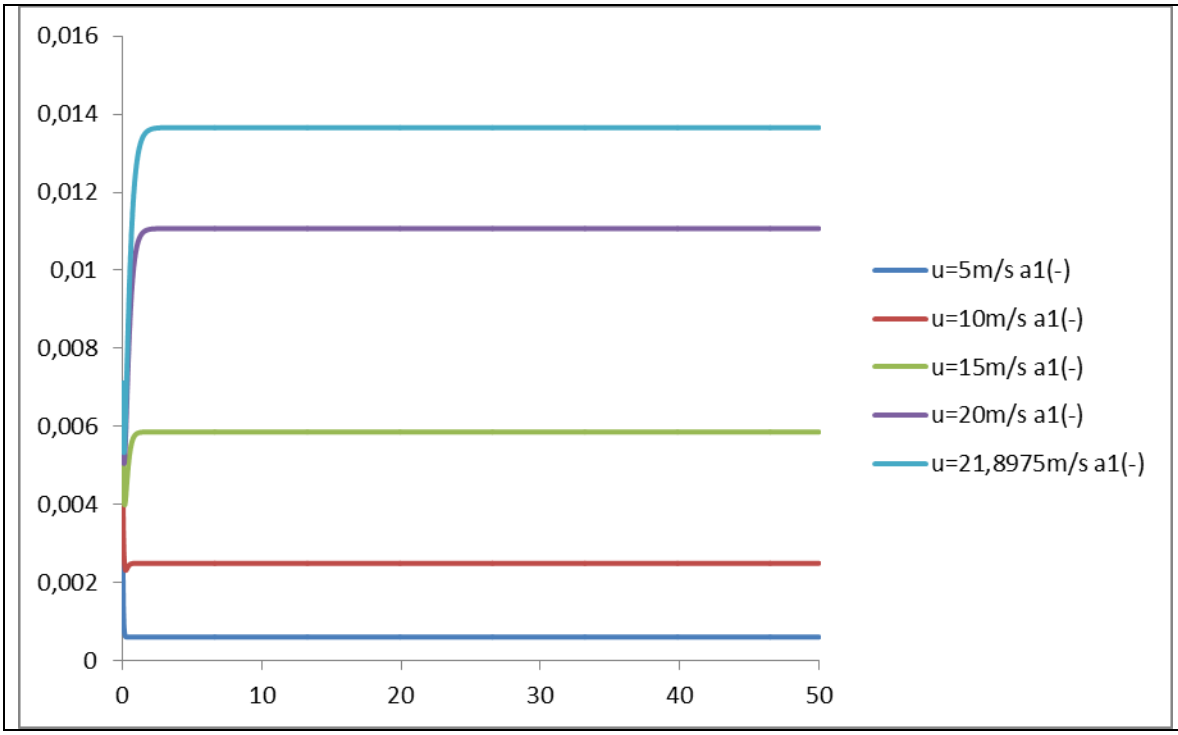
Ρυθμός μεταβολής ρυθμού εκτροπής r συναρτήσει του χρόνου



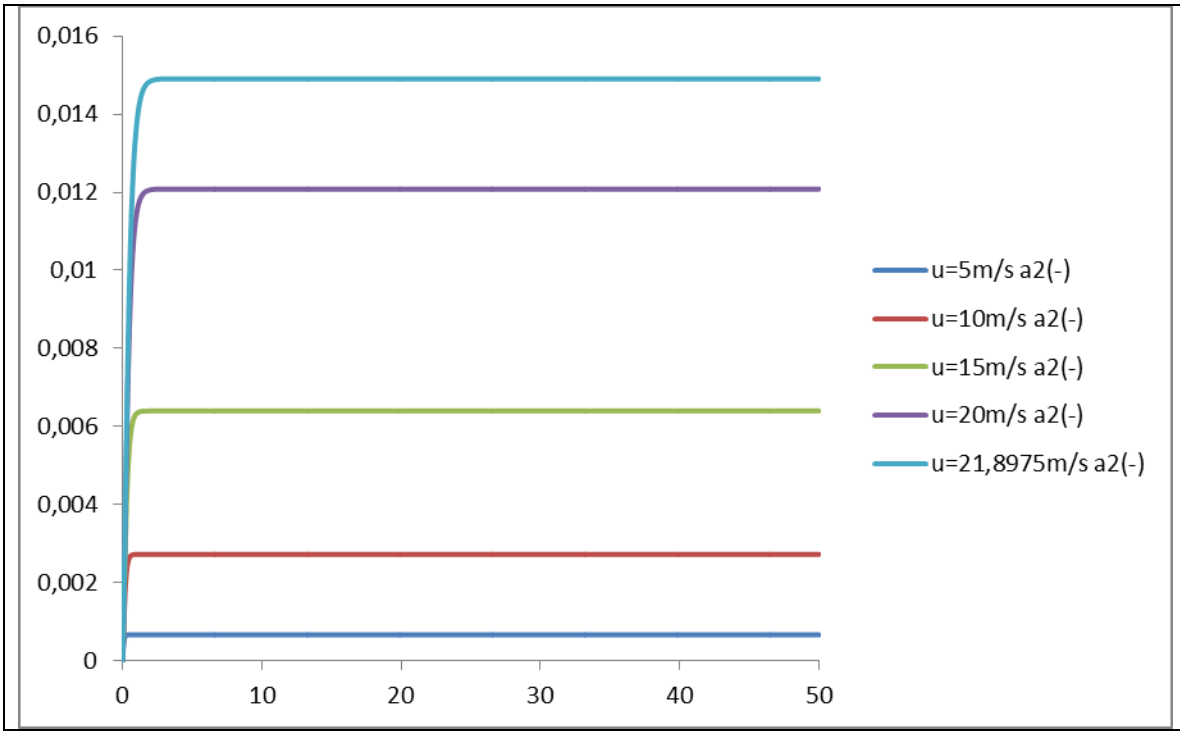
διαμήκης επιτάχυνση α_x συναρτήσει του χρόνου



εγκάρσια επιτάχυνση α_y συναρτήσει του χρόνου



γωνία ολίσθησης α_1 συναρτήσει του χρόνου



γωνία ολίσθησης α_2 συναρτήσει του χρόνου

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV: ΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

$\ddot{\beta}+\left(c_{y10}*\beta+c_{y14}\right)*\dot{\beta}+c_{y15}*\beta+c_{y16}=0$	(7.1.26)

Στην εξίσωση (7.1.26) θέτω

$f(\beta)=c_{y10}*\beta+c_{y14}$ $g(\beta)=c_{y15}*\beta+c_{y16}$	

και προκύπτει η μη γραμμική διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού

$\ddot{\beta}+f(\beta)*\dot{\beta}+g(\beta)=0$	

Στην συνέχεια θέτω

$\dot{\beta}=y_x=y, x=-\int f(\beta)\,d\beta, Q(x)=\frac{g(\beta)}{f(\beta)}$	

και προκύπτει η μη γραμμική διαφορική εξίσωση 1ου βαθμού ABEL (normal form of Abel equation)

$y_x'*y_x-y_x=Q(x)$	(I)

Όπου υπολογίζουμε το x με ολοκλήρωση

$x=-\int f(\beta)\,d\beta=-\int\left(c_{y10}*\beta+c_{y14}\right)d\beta=-c_{y10}*\frac{\beta^2}{2}-c_{y14}*\beta$	

Και εκφράζουμε την Q(x) συναρτήσει την γωνίας ολίσθησης β

$Q(x)=\frac{g(\beta)}{f(\beta)}=\frac{c_{y15}*\beta+c_{y16}}{c_{y10}*\beta+c_{y14}}$	

Στην συνέχεια εκφράζουμε την Q(x) συναρτήσει της μεταβλητής x

$\beta=\frac{-c_{y14}\pm\sqrt{c_{y14}^{\ 2}-2*c_{y10}*x}}{c_{y10}}$	

Άρα προκύπτει η μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$y_x' * y_x - y_x = \dfrac{c_{y15} * \left(\dfrac{-c_{y14} \pm \sqrt{c_{y14}^2 - 2 * c_{y10} * x}}{c_{y10}} \right) + c_{y16}}{c_{y10} * \left(\dfrac{-c_{y14} \pm \sqrt{c_{y14}^2 - 2 * c_{y10} * x}}{c_{y10}} \right) + c_{y14}}$	(II)

<u>Επίλυση με προσεγγίσεις και την βοήθεια του υπολογιστικού αρχείου xls</u>

<u>Δεδομένα (inputs)</u>

l = 2,6m
M = 1500Kg
Κατανομή μάζας (μπροστα – πίσω): 43%, 57%
δ_u = 0,005rad
χ = 0
$\tau_1 = \tau_2$ = 1,425
N_x = 0
u = 35m/s
α_1 = 1,4592m
α_2 = 1,1008m
J_z =2575,583kg*m^2
C_1 = 90000N/rad
C_2 = 75000N/rad
θ = 9°

Αρχικές συνθήκες t=0,β=0,ρ=0

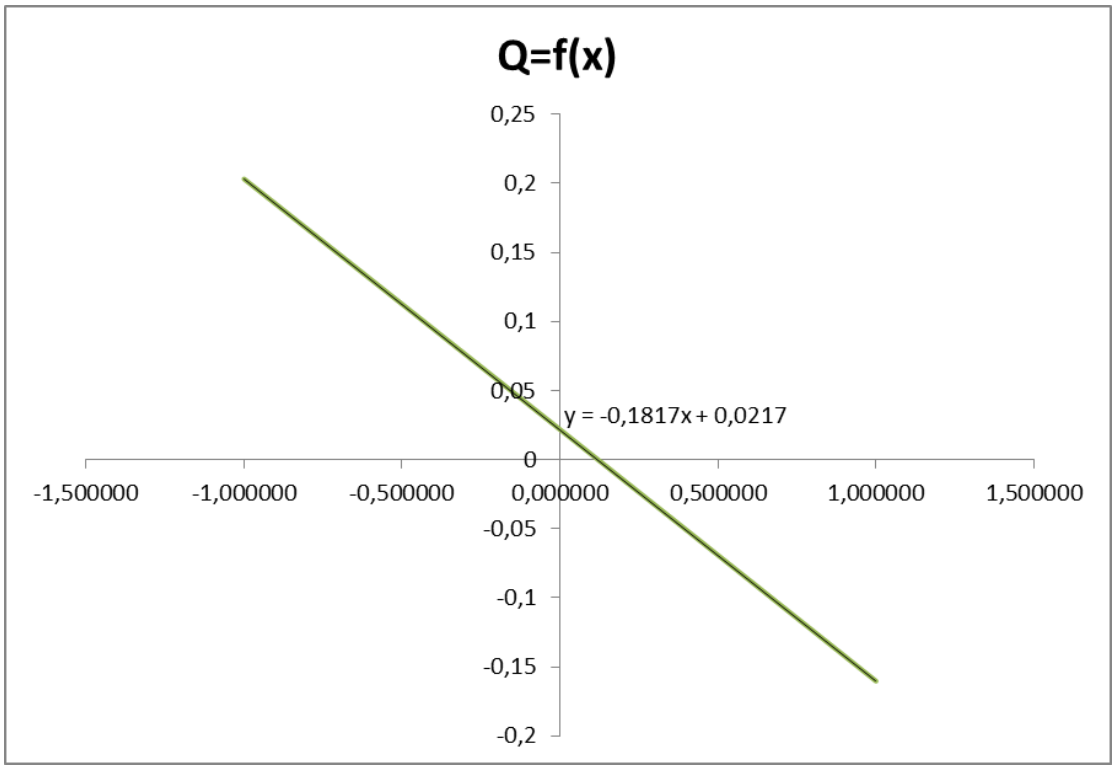
<u>Αποτελέσματα (outputs)</u>

c_{y10} = 0,044
c_{y11} = 3,082
c_{y12} = 35,124
c_{y13} = 0,012
c_{y14} = 6,153
c_{y15} = 6,881
c_{y16} = 0,134
c_{y17} = 0,007
c_{y18} = 6,153
c_{y19} = 0,162
c_{y20} = -0,001
c_{y21} = -280,744
c_{y22} = 0,13
c_{y23} = 1,115
c_{y24} = 6,153
c_{y25} = 0,007

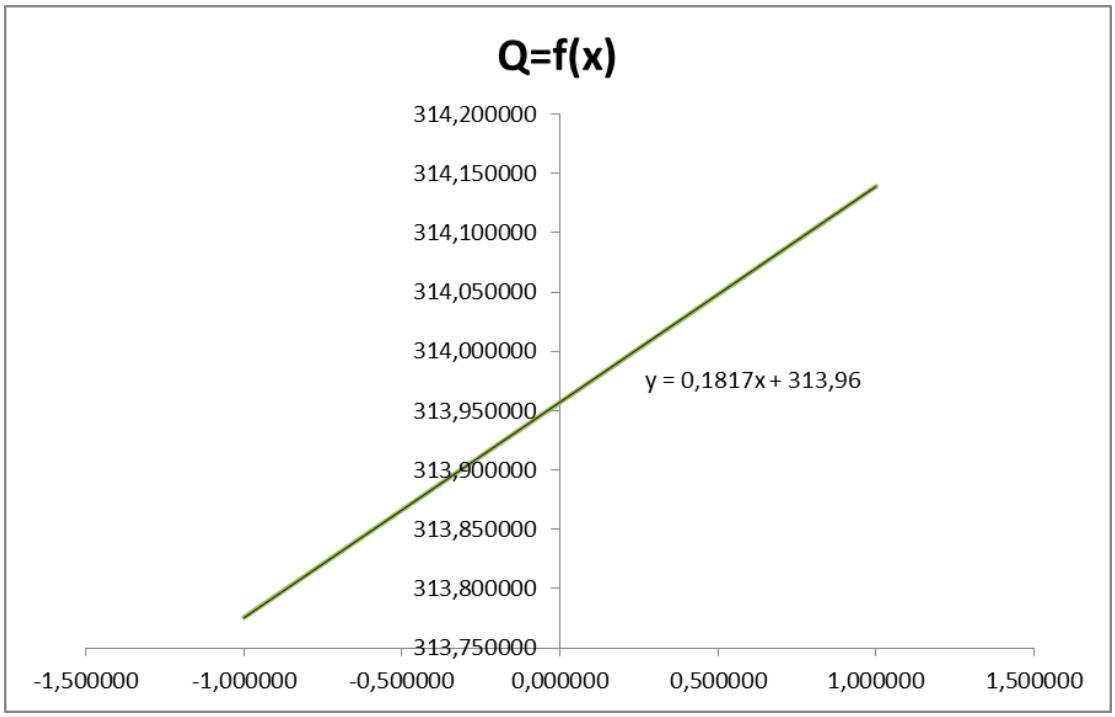
Από τα αποτελέσματα που πρόεκυψαν προσεγγίζουμε το 2° μέλος της εξίσωσης (II) σε γραμμική εξίσωση με την βοήθεια υπολογιστικού φύλλου excel οπότε προκύπτει η ακόλουθη μη γραμμική διαφορική εξίσωση 1^{ου} βαθμού

$y_x' * y_x - y_x = c_{y26} + c_{y27} * x$	

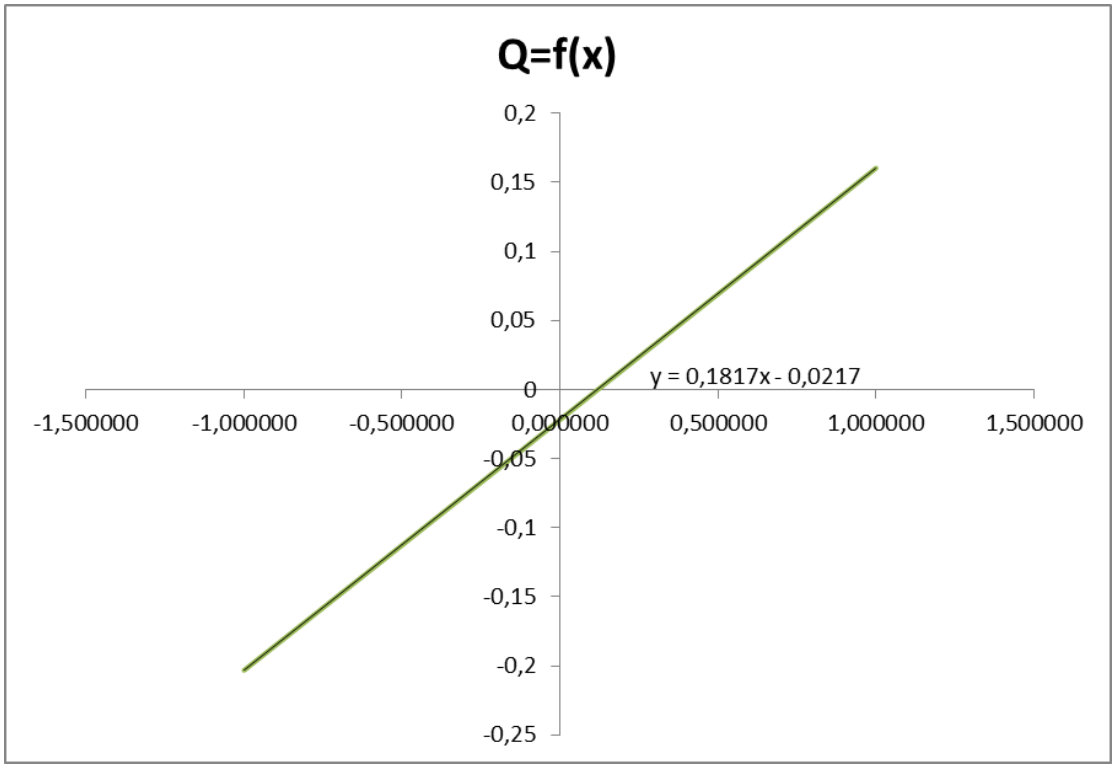
Με τα ακόλουθα ζευγάρια τιμών για τις σταθερές c_{y26} και c_{y27}



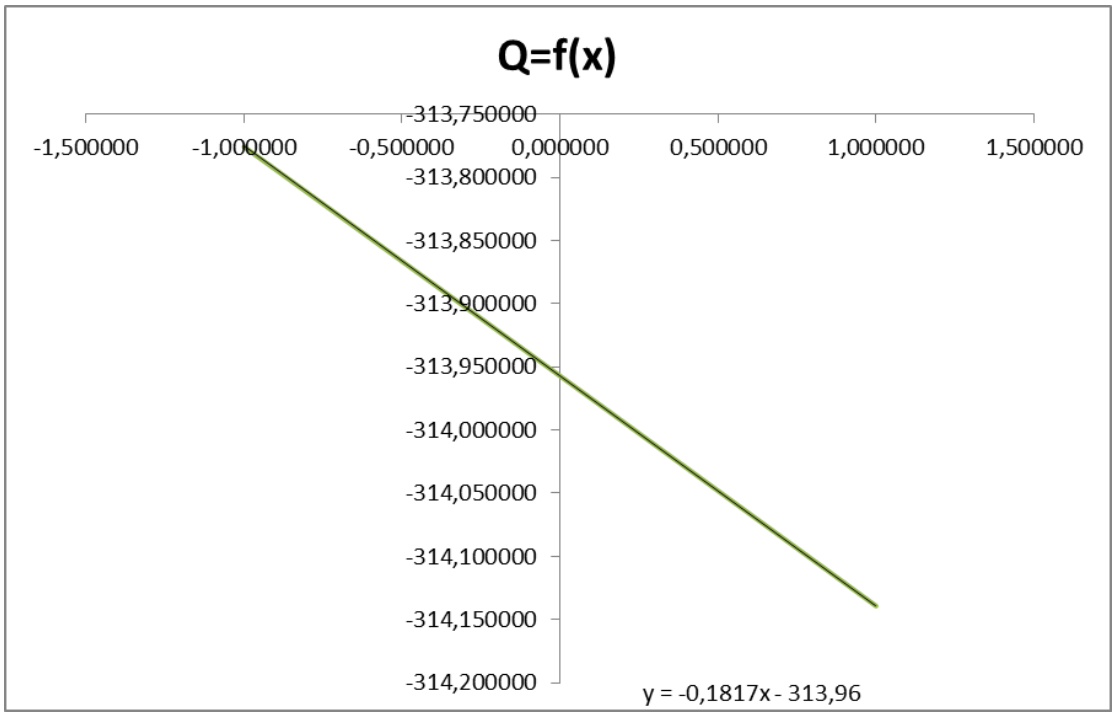
c_{y26} = 0,0217
c_{y27} = -0,1817



c_{y26} = 313,96 (μη δεκτή)
c_{y27} = 0,1817



c_{y26} = -0,0217
c_{y27} = 0,1817



c_{y26} = -313,96 (μη δεκτή)
c_{y27} = -0,1817

άρα

$$y'_x * y_x - y_x = c_{y26} + c_{y27} * x$$

όπου

c_{y26} = 0,0217
c_{y27} = -0,1817

και

c_{y26} = -0,0217
c_{y27} = 0,1817

Με την βοήθεια της Wolframalpha online προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα

$$y(x)\,y'(x) - y(x) = -0.0217 + 0.1817\,x \longrightarrow$$

$$-0.657705 \log\left(0.864275 - \frac{5.50358\,y(x)}{0.119428 - x}\right) - 4.84587 \log\left(6.36785 - \frac{5.50358\,y(x)}{x - 0.119428}\right) = 5.50358 \log(0.119428 - x) + c_1$$

και

$$y(x)\,y'(x) - y(x) = 0.0217 - 0.1817\,x \longrightarrow$$

$$8.0165 \log\left(\frac{5.50358\,y(x)}{0.119428 - x} + 4.19011\right) - 2.51292 \log\left(\frac{y(x)}{0.0217 - 0.1817\,x} + 1.31347\right) = c_1 - 5.50358 \log(0.119428 - x)$$

Κάνω αλλαγή μεταβλητής και προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μεταβλητές την γωνία ολίσθησης β και τον ρυθμό μεταβολής της γωνία ολίσθησης β

$$\dot{\beta} = y_x = y(x)$$
$$x = -c_{y10} * \frac{\beta^2}{2} - c_{y14} * \beta$$

Για β=0 και (dβ/dt)=0 προκύπτει η τιμή της σταθεράς c_1 όπου στην 1η εξίσωση προκύπτει αρνητικό όρισμα στο λογάριθμο και απορρίπτεται άρα η μοναδική λύση είναι η ακόλουθη

$$y(x)\,y'(x) - y(x) = 0.0217 - 0.1817\,x \longrightarrow$$

$$8.0165 \log\left(\frac{5.50358\,y(x)}{0.119428 - x} + 4.19011\right) - 2.51292 \log\left(\frac{y(x)}{0.0217 - 0.1817\,x} + 1.31347\right) = c_1 - 5.50358 \log(0.119428 - x)$$

με γενική μορφή

$$c_{y28} * \log\left(\frac{c_{y29} * \dot{\beta}}{c_{y30} - \beta} + c_{y31}\right) - c_{y32} * \log\left(\frac{\dot{\beta}}{c_{y33} - c_{y34} * \beta} + c_{y35}\right) = c_1 - c_{y36} * \log\left(c_{y30} - \beta\right)$$

$$c_1 = c_{y28} * \log\left(c_{y31}\right) - c_{y32} * \log\left(c_{y35}\right) + c_{y36} * \log\left(c_{y30}\right)$$

όπου

c_{y28} = 8,0165
c_{y29} = 5,50358
c_{y30} = 0,119428
c_{y31} = 4,19011
c_{y32} = 2,51292
c_{y33} = 0,0217
c_{y34} = 0,1817
c_{y35} = 1,31347
c_{y36} = 5,50358

και c_1 = -0,38873

Με την βοήθεια των τιμών που πρόεκυψαν (outputs) μπορεί να προκύψει η σχέση που συνδέει την γωνία ολίσθησης β και τον ρυθμό μεταβολής της γωνία ολίσθησης β.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V: ΚΩΔΙΚΑΣ VBA ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΝΟΣ ΙΧΝΟΥΣ

Sub SingleTrack()

```
Dim Wn(2)

Rem Dim Wn1(2)

Dim An(2, 2)

Dim An1(2, 2)

Dim bn(2)

Dim bn1(2)


Dim BIGK(2, 2)

Dim RHS(2), L(2)


Dim RHSWn(2)


MsgBox "START READING DATA - PREPROCESSOR"


Rem Read Cornering Stiffesses or Y1(a1), Y2(a2) Coefficients or

Rem quadratic formula coefficients


C1 = Worksheets("INPUT").Range("D3")


C2 = Worksheets("INPUT").Range("E3")


C1y = Worksheets("INPUT").Range("B5")

C2y = Worksheets("INPUT").Range("C5")


Rem write INPUT

    Worksheets("OUTPUT").Range("D3") = C1
```

```
    Worksheets("OUTPUT").Range("E3") = C2

Rem Read Vehicle Mass
  m = Worksheets("INPUT").Range("F3")

   Rem write INPUT
      Worksheets("OUTPUT").Range("F3") = m

Rem Read Inertia Jz
  Jz = Worksheets("INPUT").Range("G3")

  Rem write INPUT
      Worksheets("OUTPUT").Range("G3") = Jz

  Rem Read a1, a2 (distances of mass center from front and rear)
  a1 = Worksheets("INPUT").Range("H3")
  a2 = Worksheets("INPUT").Range("I3")

     Rem write INPUT
       Worksheets("OUTPUT").Range("H3") = a1
       Worksheets("OUTPUT").Range("I3") = a2

  Rem Read Front steering gear ratio ô1
  ts1 = Worksheets("INPUT").Range("J3")

  Rem write INPUT
      Worksheets("OUTPUT").Range("J3") = ts1
```

```
Rem Read Parameter ÷ (Rear steering)
xx = Worksheets("INPUT").Range("K3")

 Rem write INPUT
    Worksheets("OUTPUT").Range("K3") = xx

Rem Read Front steering (driver input) in rad - MAX VALUE
deltayMAX = Worksheets("INPUT").Range("M3")

Rem Read Front steering (driver input) in rad - MIN VALUE
deltayMIN = Worksheets("INPUT").Range("M6")

Rem Time to turn
turn = Worksheets("INPUT").Range("L9")

Rem write INPUT
    Worksheets("OUTPUT").Range("M3") = deltayMAX
    Worksheets("OUTPUT").Range("M6") = deltayMIN
    Worksheets("OUTPUT").Range("L9") = turn

 Rem Read Time Step Dt
  Dt = Worksheets("INPUT").Range("C8")

  Rem write INPUT
       Worksheets("OUTPUT").Range("B13") = Dt

 Rem Read Forward Velocity u (almost constant for current theory)
  u = Worksheets("INPUT").Range("D8")
```

```
Rem write INPUT
    Worksheets("OUTPUT").Range("C13") = u

Rem Read Initial Lateral Velocity v(0)
v0 = Worksheets("INPUT").Range("C11")

Rem write INPUT
    Worksheets("OUTPUT").Range("B16") = v0

Rem Read Initial Yaw Rate  r(0)
r0 = Worksheets("INPUT").Range("D11")

Rem write INPUT
    Worksheets("OUTPUT").Range("C16") = r0

Rem Read theta (numerical Integration) - Used for THETA - METHOD ONLY
theta = Worksheets("INPUT").Range("E11")

Rem write INPUT
    Worksheets("OUTPUT").Range("D16") = theta

Rem Read Number of time steps
Nt = Worksheets("INPUT").Range("F11")

Rem write INPUT
    Worksheets("OUTPUT").Range("E16") = Nt

Rem Read Initial angle with respect to fixed system
psi0 = Worksheets("INPUT").Range("G11")
```

```
Rem write INPUT
    Worksheets("OUTPUT").Range("F16") = psi0

Rem CALCULATIONS
Rem ============

Rem Front Axle Steering
  delta1 = ts1 * deltayMAX

Rem Rear Axle Steering
  delta2 = xx * ts1 * deltayMAX

Rem write OUTPUT
Worksheets("OUTPUT").Range("B9") = delta1
Worksheets("OUTPUT").Range("C9") = delta2

Rem Initialize state variable vector
Wn(1) = v0
Wn(2) = r0

Rem  Initialize ø,x,y
  psi = psi0
  xi = 0
  yi = 0

Rem Initialize slip angles - Steering angle
  aa1 = deltayMIN * ts1 - (v0 + r0 * a1) / u
  aa2 = deltayMIN * xx * ts1 - (v0 - r0 * a2) / u
  deltay = deltayMIN
```

```
Rem METHOD - THETA - WILSON
Rem Loop over number of time steps
Rem  ============================

For N = 1 To Nt + 1

Rem WRITE OUTPUT at step N, time (N-1)*Dt

  Worksheets("OUTPUT").Range("B" & 20 + N) = N
  Worksheets("OUTPUT").Range("C" & 20 + N) = (N - 1) * Dt
  Worksheets("OUTPUT").Range("D" & 20 + N) = Wn(1)
  Worksheets("OUTPUT").Range("E" & 20 + N) = Wn(2)
  Worksheets("OUTPUT").Range("F" & 20 + N) = psi
  Worksheets("OUTPUT").Range("G" & 20 + N) = xi
  Worksheets("OUTPUT").Range("H" & 20 + N) = yi

 Rem Vehicle slip angle
  BetaVeh = Atn(Wn(1) / u)

  Worksheets("OUTPUT").Range("I" & 20 + N) = BetaVeh * 180 / 3.14159265358979

  Worksheets("OUTPUT").Range("J" & 20 + N) = aa1 * 180 / 3.14159265358979
  Worksheets("OUTPUT").Range("K" & 20 + N) = aa2 * 180 / 3.14159265358979

 Rem Establish An
  Call Alfa(An, C1, C2, m, u, a1, a2, Jz)

 Rem Establish An1 (here is the same as An)
  Call Alfa(An1, C1, C2, m, u, a1, a2, Jz)
```

```
 Rem Establish bn
  Call Beta(bn, C1, C2, xx, m, ts1, Jz, a1, a2)

Rem Establish bn1
   Call Beta(bn1, C1, C2, xx, m, ts1, Jz, a1, a2)

Rem DEVELOP BIGK (LEFT HAND SIDE) at time n+1
  Call Lefthand(BIGK, An1, theta, Dt)

Rem Contribution of An to the Right Hand Side
   Call RighthandWn(theta, Dt, An, RHSWn, Wn)

Rem  Compute Right hand side
   Call RighthandSide(RHS, RHSWn, bn, bn1, theta, Dt, deltay)

Rem Solve the system for Wn1
Call Gauss(2, BIGK, RHS, 0, D, IREG, L)

Rem Current values - n
   un0 = u * Cos(psi) - Wn(1) * Sin(psi)
   vn0 = u * Sin(psi) + Wn(1) * Cos(psi)

 Rem Update psi
   psi = psi + 0.5 * Dt * (RHS(2) + Wn(2))

Rem Next values - n+1
   un1 = u * Cos(psi) - RHS(1) * Sin(psi)
   vn1 = u * Sin(psi) + RHS(1) * Cos(psi)

xi = xi + 0.5 * Dt * (un0 + un1)
```

```
yi = yi + 0.5 * Dt * (vn0 + vn1)

Rem Update Wn
 Wn(1) = RHS(1)
 Wn(2) = RHS(2)

 Rem  TURNING GRADUALLY
Rem Update steering and slip angles (for next time step)
   If (N * Dt < turn) Then
      deltay = (deltayMAX - deltayMIN) * N * Dt / turn + deltayMIN
   Else
      deltay = deltayMAX
   End If

  aa1 = deltay * ts1 - (Wn(1) + Wn(2) * a1) / u
  aa2 = deltay * xx * ts1 - (Wn(1) - Wn(2) * a2) / u

Next N

Rem GoTo 100

Rem ==========================================
Rem
Rem  4th ORDER  RUNGE-KUTTA METHOD - EXPLICIT TIME INTEGRATION
Rem   USES THE NONLINEAR Y = Y(a)
Rem ==========================================

Rem Initialize state variable vector
Wn(1) = v0
Wn(2) = r0
```

```
Rem  Initialize ø,x,y
   psi = psi0
   xi = 0
   yi = 0

 Rem Initialize slip angles
   aa1 = deltayMIN * ts1 - (v0 + r0 * a1) / u
   aa2 = deltayMIN * xx * ts1 - (v0 - r0 * a2) / u

     deltay = deltayMIN

 Rem Loop over number of time steps
 Rem  ============================

 For N = 1 To Nt + 1

    Worksheets("OUTPUT1").Range("B" & 20 + N) = N
    Worksheets("OUTPUT1").Range("C" & 20 + N) = (N - 1) * Dt
    Worksheets("OUTPUT1").Range("D" & 20 + N) = Wn(1)
    Worksheets("OUTPUT1").Range("E" & 20 + N) = Wn(2)
    Worksheets("OUTPUT1").Range("F" & 20 + N) = psi
    Worksheets("OUTPUT1").Range("G" & 20 + N) = xi
    Worksheets("OUTPUT1").Range("H" & 20 + N) = yi

    BetaVeh = Atn(Wn(1) / u)

    Worksheets("OUTPUT1").Range("I" & 20 + N) = BetaVeh * 180 / 3.14159265358979
    Worksheets("OUTPUT1").Range("X" & 20 + N) = aa1 * 180 / 3.14159265358979
    Worksheets("OUTPUT1").Range("Y" & 20 + N) = aa2 * 180 / 3.14159265358979
```

```
  Rem START RUNGE 4th ORDER RUNGE-KUTTA METHOD
Rem FIRST
Rem =========
  Rem Call G1(Wn(1), Wn(2), m, u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, GG1)
      Call G1(Wn(1), Wn(2), m, u, a1, a2, C1y, C2y, xx, ts1, deltay, GG1)
      K11 = GG1

   Rem Call G2(Wn(1), Wn(2), u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, Jz, GG2)
       Call G2(Wn(1), Wn(2), u, a1, a2, C1y, C2y, xx, ts1, deltay, Jz, GG2)
      K21 = GG2

     vv = Wn(1) + (1 / 2) * Dt * K11
     rr = Wn(2) + (1 / 2) * Dt * K21

Rem SECOND
Rem ==========
Rem Call G1(vv, rr, m, u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, GG1)
    Call G1(vv, rr, m, u, a1, a2, C1y, C2y, xx, ts1, deltay, GG1)
      K12 = GG1

  Rem  Call G2(vv, rr, u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, Jz, GG2)
       Call G2(vv, rr, u, a1, a2, C1y, C2y, xx, ts1, deltay, Jz, GG2)
      K22 = GG2

   vv1 = Wn(1) + (1 / 2) * Dt * K12
     rr1 = Wn(2) + (1 / 2) * Dt * K22

Rem THIRD
Rem ==========
```

```
Rem Call G1(vv1, rr1, m, u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, GG1)
  Call G1(vv1, rr1, m, u, a1, a2, C1y, C2y, xx, ts1, deltay, GG1)
      K13 = GG1

 Rem   Call G2(vv1, rr1, u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, Jz, GG2)
   Call G2(vv1, rr1, u, a1, a2, C1y, C2y, xx, ts1, deltay, Jz, GG2)
      K23 = GG2

   vv2 = Wn(1) + Dt * K13
     rr2 = Wn(2) + Dt * K23

  Rem FOURTH
  Rem ==========
   Rem  Call G1(vv2, rr2, m, u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, GG1)
   Rem  Call G2(vv2, rr2, u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, Jz, GG2)

     Call G1(vv2, rr2, m, u, a1, a2, C1y, C2y, xx, ts1, deltay, GG1)
     Call G2(vv2, rr2, u, a1, a2, C1y, C2y, xx, ts1, deltay, Jz, GG2)

  K14 = GG1
  K24 = GG2

Rem New Values of variables (time N*Dt) or step N+1
  RHS(1) = Wn(1) + (Dt / 6) * (K11 + 2 * K12 + 2 * K13 + K14)
  RHS(2) = Wn(2) + (Dt / 6) * (K21 + 2 * K22 + 2 * K23 + K24)

Rem Current values - N
   un0 = u * Cos(psi) - Wn(1) * Sin(psi)
   vn0 = u * Sin(psi) + Wn(1) * Cos(psi)
```

```
 Rem Update psi
   psi = psi + 0.5 * Dt * (RHS(2) + Wn(2))

Rem Next values - n+1
   un1 = u * Cos(psi) - RHS(1) * Sin(psi)
   vn1 = u * Sin(psi) + RHS(1) * Cos(psi)

xi = xi + 0.5 * Dt * (un0 + un1)
yi = yi + 0.5 * Dt * (vn0 + vn1)

Rem Update Wn
 Wn(1) = RHS(1)
 Wn(2) = RHS(2)

 Rem Update slip angles

 Rem  TURNING
Rem Update steering and slip angles
    If (N * Dt < turn) Then
        deltay = (deltayMAX - deltayMIN) * N * Dt / turn + deltayMIN
    Else
        deltay = deltayMAX
    End If

  aa1 = deltay * ts1 - (Wn(1) + Wn(2) * a1) / u
  aa2 = deltay * xx * ts1 - (Wn(1) - Wn(2) * a2) / u

Next N
```

```
  Rem ==========================
  Rem ==========================

  Rem Initialize state variable vector

  Wn(1) = v0
  Wn(2) = r0

Rem  Initialize ø,x,y
    psi = psi0

    xi = 0
    yi = 0

     Rem Initialize slip angles
    aa1 = deltayMIN * ts1 - (v0 + r0 * a1) / u
    aa2 = deltayMIN * xx * ts1 - (v0 - r0 * a2) / u

      deltay = deltayMIN

  Rem FORWARD METHOD - SIMPLE ITERATIVE SCHEME FOR NONLINEAR
PROBLEMS
  Rem Loop over number of time steps
  Rem  Uses Nonlinear Y = Y(a)
  Rem
=========================================================================

  For N = 1 To Nt + 1
```

```
    Worksheets("OUTPUT2").Range("B" & 20 + N) = N
    Worksheets("OUTPUT2").Range("C" & 20 + N) = (N - 1) * Dt
    Worksheets("OUTPUT2").Range("D" & 20 + N) = Wn(1)
    Worksheets("OUTPUT2").Range("E" & 20 + N) = Wn(2)
    Worksheets("OUTPUT2").Range("F" & 20 + N) = psi
    Worksheets("OUTPUT2").Range("G" & 20 + N) = xi
    Worksheets("OUTPUT2").Range("H" & 20 + N) = yi

    BetaVeh = Atn(Wn(1) / u)

    Worksheets("OUTPUT2").Range("I" & 20 + N) = BetaVeh * 180 / 3.14159265358979
    Worksheets("OUTPUT2").Range("X" & 20 + N) = aa1 * 180 / 3.14159265358979
    Worksheets("OUTPUT2").Range("Y" & 20 + N) = aa2 * 180 / 3.14159265358979

  Rem Establish An
   Call Alfanon1(BIGK, u, Dt)

 Rem  Compute Right hand side
   Rem  Call Right1(RHS, deltay, ts1, xx, Wn(1), Wn(2), a1, a2, u, m, Jz, C1, C2, Dt)
    Call Right1(RHS, deltay, ts1, xx, Wn(1), Wn(2), a1, a2, u, m, Jz, C1y, C2y, Dt)

 Rem Solve the system for Wn1
 Call Gauss(2, BIGK, RHS, 0, D, IREG, L)

 Rem Current values - n
    un0 = u * Cos(psi) - Wn(1) * Sin(psi)
    vn0 = u * Sin(psi) + Wn(1) * Cos(psi)
```

```
 Rem Update psi
   psi = psi + 0.5 * Dt * (RHS(2) + Wn(2))

Rem Next values - n+1
   un1 = u * Cos(psi) - RHS(1) * Sin(psi)
   vn1 = u * Sin(psi) + RHS(1) * Cos(psi)

xi = xi + 0.5 * Dt * (un0 + un1)
yi = yi + 0.5 * Dt * (vn0 + vn1)

Rem Update Wn
 Wn(1) = RHS(1)
 Wn(2) = RHS(2)

Rem Update steering and slip angles

Rem  TURNING
Rem Update slip angles
    If (N * Dt < turn) Then
        deltay = (deltayMAX - deltayMIN) * N * Dt / turn + deltayMIN
    Else
        deltay = deltayMAX
    End If

  aa1 = deltay * ts1 - (Wn(1) + Wn(2) * a1) / u
  aa2 = deltay * xx * ts1 - (Wn(1) - Wn(2) * a2) / u

Next N
End Sub
```

Sub Alfa(A, C1, C2, m, u, a1, a2, Jz)

```
Rem Establish A matrix

  A(1, 1) = (C1 + C2) / (m * u)
  A(1, 2) = (C1 * a1 - C2 * a2) / (m * u) + u
  A(2, 1) = (C1 * a1 - C2 * a2) / (u * Jz)
  A(2, 2) = (C1 * a1 ^ 2 + C2 * a2 ^ 2) / (u * Jz)

End Sub
```

Sub Beta(B, C1, C2, xx, m, ts1, Jz, a1, a2)

```
Rem Establish b  matrix

B(1) = ts1 * (C1 + C2 * xx) / m
B(2) = ts1 * (C1 * a1 - C2 * a2 * xx) / Jz

End Sub
```

Sub Lefthand(BIGK, An1, theta, Dt)

```
BIGK(1, 1) = 1 + theta * Dt * An1(1, 1)
BIGK(2, 2) = 1 + theta * Dt * An1(2, 2)

BIGK(1, 2) = theta * Dt * An1(1, 2)
BIGK(2, 1) = theta * Dt * An1(2, 1)

End Sub
```

Sub RighthandWn(theta, Dt, An, RHSWn, Wn)

```
Dim TEMP(2, 2)

  TEMP(1, 1) = 1 - (1 - theta) * Dt * An(1, 1)
  TEMP(2, 2) = 1 - (1 - theta) * Dt * An(2, 2)
  TEMP(1, 2) = -(1 - theta) * Dt * An(1, 2)
  TEMP(2, 1) = -(1 - theta) * Dt * An(2, 1)

  RHSWn(1) = TEMP(1, 1) * Wn(1) + TEMP(1, 2) * Wn(2)
  RHSWn(2) = TEMP(2, 1) * Wn(1) + TEMP(2, 2) * Wn(2)

End Sub
```

Sub RighthandSide(RHS, RHSWn, bn, bn1, theta, Dt, deltay)

```
RHS(1) = RHSWn(1) + (1 - theta) * Dt * deltay * bn(1) + theta * Dt * deltay * bn1(1)
RHS(2) = RHSWn(2) + (1 - theta) * Dt * deltay * bn(2) + theta * Dt * deltay * bn1(2)

End Sub
```

Sub Gauss(N, A, B, IOPT, D, IREG, L)

```
Rem
Rem     DECOMPOSITION OF THE MATRIX A AND/OR SOLUTION OF THE
Rem     LINEAR SYSTEM AX=B BY GAUSS' ELIMINATION METHOD
Rem
Rem     INPUT:
Rem
```

```
Rem     N: DIMENSION OF ARRAYS
Rem     A: SYSTEM MATRIX(NXN)
Rem     B: RIGHT-HAND SIDE VECTOR (N)
Rem     IOPT = 0, DECOMPOSITION OF A AND SOLUTION OF THE SYSTEM
Rem          = 1, DECOMPOSITION OF A ONLY
Rem          = 2, SOLUTION OF THE SYSTEM (SKIPS DECOMPOSITION)
Rem
Rem    OUTPUT:
Rem     A: DECOMPOSED MATRIX (LOWER\UPPER PART), IF IOPT=0 OR 1
Rem     B:=X: SOLUTION VECTOR STORED IN B (N)
Rem     D: DETERMINANT OF A
Rem     IREG = 0, SINGULAR MATRIX A
Rem          = 1, REGULAR MATRIX A
Rem      L: VECTOR OF PIVOTING INDICES (N)
Rem
 Rem       Dim A(1000, 1000)
  Rem      Dim B(1000)
  Rem      Dim L(1000)

        EE = 0.000000000001
        IREG = 1
        NM = N - 1

Rem     Just Solution - Skip Decomposition
        If (IOPT = 2) Then
          GoTo 60
        End If

Rem
Rem     TRIANGULAR DECOMPOSITION OF A WITH MAXIMUM COLUMN PIVOTING
```

```
Rem     (ELIMINATION WITH MULTIPLIERS STORED IN THE LOWER PART OF A)
Rem
        D = 1

   For K = 1 To NM
     KP = K + 1
     m = K

       For I = KP To N
         If (Abs(A(I, K)) > Abs(A(m, K))) Then
           m = I
         End If
       Next I

      L(K) = m
      D = D * A(m, K)

     If (Abs(A(m, K)) <= EE) Then
       GoTo 100
     End If

     If (m = K) Then
       GoTo 30
     End If

      D = -D

       For J = K To N
         S = A(m, J)
         A(m, J) = A(K, J)
```

```
          A(K, J) = S

        Next J

30       For I = KP To N
         S = A(I, K) / A(K, K)
         A(I, K) = S

          For J = KP To N
            A(I, J) = A(I, J) - S * A(K, J)
          Next J

       Next I
     Next K
     D = D * A(N, N)

     If (Abs(A(N, N)) <= EE) Then
       GoTo 100
     End If

     If (IOPT = 1) Then
       GoTo 200
     End If
Rem
Rem     ELIMINATION OPERATIONS ON B
Rem
60    For K = 1 To NM
       KP = K + 1
       m = L(K)
       S = B(m)
```

```
        B(m) = B(K)
        B(K) = S

         For I = KP To N
           B(I) = B(I) - A(I, K) * S
         Next I

     Next K
Rem
Rem BACK - SUBSTITUTION
Rem
      B(N) = B(N) / A(N, N)

      For I = 1 To NM
       K = N - I
       KP = K + 1
       S = 0

         For J = KP To N
           S = S + A(K, J) * B(J)
         Next J

       B(K) = (B(K) - S) / A(K, K)

       Next I

      GoTo 200

100   IREG = 0
200    End Sub
```

Sub G1(v, r, m, u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, GG1)

```
    Rem CALLED BY RUNGE-KUTTA METHOD


Rem axle slips
  aa1 = deltay * ts1 - (v + r * a1) / u
  aa2 = deltay * xx * ts1 - (v - r * a2) / u


pip = 3.14159265358979
   aa1deg = (180 / pip) * aa1
   aa2deg = (180 / pip) * aa2


   Rem for the particular function, check that tire slip angle is less than 7 degrees
   If (Abs(aa1deg) > 7) Then
    Rem   aa1deg = 7
      Stop
  End If


    If (Abs(aa2deg) > 7) Then
      Rem aa2deg = 7
      Stop
  End If


  Rem fix the correct sign for lateral tire force
  Rem ==========================================
If aa1deg > 0 Then
      Y1 = C1 * aa1deg ^ 2 + C2 * aa1deg
 Else
      Y1 = -C1 * aa1deg ^ 2 + C2 * aa1deg
```

```
End If

 If aa2deg > 0 Then
   Y2 = C1 * aa2deg ^ 2 + C2 * aa2deg
 Else
   Y2 = -C1 * aa2deg ^ 2 + C2 * aa2deg
 End If

CC = Y1 + Y2

GG1 = CC / m - u * r

End Sub
```

Sub G2(v, r, u, a1, a2, C1, C2, xx, ts1, deltay, Jz, GG2)

```
Rem CALLED BY RUNGE-KUTTA

Rem axle slips
 aa1 = deltay * ts1 - (v + r * a1) / u
 aa2 = deltay * xx * ts1 - (v - r * a2) / u

 pip = 3.14159265358979
  aa1deg = (180 / pip) * aa1
  aa2deg = (180 / pip) * aa2

Rem for the particular function, check that tire slip angle is less than 7 degrees
 If (aa1deg > 7) Then
      Rem aa1deg = 7
```

```
      Stop
  End If

    If (aa2deg > 7) Then
      Rem  aa2deg = 7
      Stop
  End If

Rem fix the correct sign for lateral tire force
  Rem ==========================================
If aa1deg > 0 Then
      Y1 = C1 * aa1deg ^ 2 + C2 * aa1deg
 Else
      Y1 = -C1 * aa1deg ^ 2 + C2 * aa1deg

 End If

   If aa2deg > 0 Then
      Y2 = C1 * aa2deg ^ 2 + C2 * aa2deg
    Else
      Y2 = -C1 * aa2deg ^ 2 + C2 * aa2deg
    End If

  CC = Y1 * a1 - Y2 * a2

  GG2 = CC / Jz

End Sub
```

Sub Alfanon1(A, u, Dt)

```
 Rem Establish A matrix


   A(1, 1) = 1

   A(1, 2) = u * Dt

   A(2, 1) = 0

   A(2, 2) = 1


End Sub
```

Sub Right1(RHS, deltay, ts1, xx, v, r, a1, a2, u, m, Jz, C1, C2, Dt)

```
Rem axle slips

   aa1 = deltay * ts1 - (v + r * a1) / u

   aa2 = deltay * xx * ts1 - (v - r * a2) / u


  pip = 3.14159265358979

    aa1deg = (180 / pip) * aa1

    aa2deg = (180 / pip) * aa2


 Rem for the particular function, check that tire slip angle is less than 7 degrees

 If (aa1deg > 7) Then

      Rem aa1deg = 7

      Stop

   End If


     If (aa2deg > 7) Then

      Rem aa2deg = 7

      Stop
```

```
  End If

 Rem fix the correct sign for lateral tire force
  Rem ==========================================
 If aa1deg > 0 Then
     Y1 = C1 * aa1deg ^ 2 + C2 * aa1deg
 Else
     Y1 = -C1 * aa1deg ^ 2 + C2 * aa1deg

 End If

  If aa2deg > 0 Then
     Y2 = C1 * aa2deg ^ 2 + C2 * aa2deg
   Else
     Y2 = -C1 * aa2deg ^ 2 + C2 * aa2deg
   End If

  Rem Y1 = C1 * aa1
  Rem Y2 = C2 * aa2

  CC1 = Y1 + Y2

  CC2 = Y1 * a1 - Y2 * a2

  RHS(1) = (CC1 / m) * Dt + v

  RHS(2) = (CC2 / Jz) * Dt + r


End Sub
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΙΒΛΙΑ

- [1] Massimo Guiggiani, “The Science of Vehicle Dynamics”, Springer
- [2] Reza N. Jazar, “Vehicle Dynamics: Theory and Applications”, Springer
- [3] “An Introduction to Modern Vehicle Design”, Edited by Julian Happian-Smith, Butterworth Heinemann, 2002
- [4] William F. Milliken and Douglas L. Milliken, “Race Car Vehicle Dynamics”
- [5] handbook of exact solutions for ordinary differential equations 2nd edition Polyanin-Zaitsev
- [6] Αρχικός σχεδιασμός οχημάτων με κριτήριο την ευστάθεια (ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ) ΚΑΡΑΟΓΛΑΝΙΔΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ

- https://www.lamborghini.com/en-en/brand/masterpieces/Gallardo-lp-550-2-coupe
- http://mathworld.wolfram.com/Runge-KuttaMethod.html
- https://math.la.asu.edu/~dajones/class/275/ch2.pdf
- https://mathbooksgr.files.wordpress.com/2011/12/diaforikes_sourlas_2007.pdf
- http://faculty.uml.edu/Dimitris_Christodoulou/Teaching/documents/handbook_DE.pdf